■ ①أ

لدينا : $p \wedge q = 1$

إذن حسب مبرهنة $Bezout$:

$$(\exists\, u_0 , v_0 \in \mathbb{Z}) \;:\; pu_0 + qv_0 = 1$$

■ ①ب

ليكن : $x_0 = bpu_0 + aqv_0$

لدينا حسب السؤال ①أ $qv_0 = 1 - pu_0$

إذن : $x_0 = bpu_0 + a(1 - pu_0)$

يعني : $x_0 = bpu_0 + a - apu_0$

و منه : $x_0 = p(bu_0 - au_0) + a$

إذن : $x_0 - a = p(bu_0 - au_0)$

يعني : $p \,/\, (x_0 - a)$ و بالتالي : $\boxed{x_0 \equiv a\,[p]}$ (1)

و لدينا كذلك حسب السؤال ①أ $pu_0 = 1 - qv_0$

إذن:
$$\begin{aligned} x_0 &= b(1 - qv_0) + v_0 a \\ &= b - bqv_0 + qv_0 a \\ &= q(v_0 a - bv_0) + b \end{aligned}$$

و منه : $x_0 - b = q(v_0 a - bv_0)$

يعني : $q \,/\, (x_0 - b)$ و بالتالي : $\boxed{x_0 \equiv b\,[q]}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن x_0 حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

■ ②

للإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى خاصية قوية في الحسابيات و هي :

$$\boxed{\begin{cases} m/a \\ n/a \\ m \wedge n = 1 \end{cases} \Rightarrow \quad mn \,/\, a}$$

لنبرهن أولا على صحة هذه الخاصية

لدينا : $m \,/\, a$ إذن : $\overset{(*)}{\boxed{a = mk}}\,; (\exists k \in \mathbb{Z})$

و لدينا كذلك : $n \,/\, a$ إذن حسب $(*)$: $n \,/\, mk$

و بما أن $m \wedge n = 1$ فإنه حسب $(Gauss)$: $n \,/\, k$

يعني : $\overset{(**)}{\boxed{k = nk'}}\,; (\exists k' \in \mathbb{Z})$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن : $a = mnk'$

إذن : $\boxed{mn \,/\, a}$

نعود إلى التمرين لاستغلال الخاصية المبرهن عليها :

ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S})$.

نريد أن نبين أن $pq \,/\, (x - x_0)$.

لدينا : x_0 و x حلين للنظمة $(\mathcal{S})$.

إذن :
$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \\ x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

و منه :
$$\begin{cases} (x - a) = k_1 p \\ (x - b) = k_2 q \\ (x_0 - a) = k_3 p \\ (x_0 - b) = k_4 q \end{cases} ;\; (\exists\, k_1, k_2, k_3, k_4 \in \mathbb{Z})$$

لدينا :
$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - a) - (x_0 - a) \\ &= k_1 p - k_3 p \\ &= (k_1 - k_3)p \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{p \,/\, (x - x_0)}$ (1)

و لدينا كذلك :
$$\begin{aligned} (x - x_0) &= (x - b) - (x_0 - b) \\ &= k_2 q - k_4 q \\ &= (k_2 - k_4)q \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{q \,/\, (x - x_0)}$ (2)

حصلنا لحد الآن على :
$$\begin{cases} p \,/\, (x - x_0) \\ q \,/\, (x - x_0) \\ p \wedge q = 1 \end{cases}$$

من هذه الأشياء نستنتج حسب الخاصية أن : $pq \,/\, (x - x_0)$.

■ ③

ننطلق من : $pq \,/\, (x - x_0)$

و نريد أن نبين أن :
$$\begin{cases} x \equiv a[p] \\ x \equiv b[q] \end{cases}$$

لدينا x_0 حل للنظمة $(\mathcal{S})$ يعني :
$$\begin{cases} x_0 \equiv a[p] \\ x_0 \equiv b[q] \end{cases}$$

و منه :
$$\begin{cases} x_0 = k_1 p + a \quad (1) \\ x_0 = k_2 q + b \quad (2) \end{cases} ;\; (\exists\, k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

و لدينا حسب الإنطلاقة : $pq \,/\, (x - x_0)$

إذن : $\overset{(3)}{\boxed{(x - x_0) = k_3 pq}}\;;\; (\exists k_3 \in \mathbb{Z})$

من (1) و (3) نستنتج أن : $x - (k_1 p + a) = k_3 pq$

يعني : $x - a = p(k_3 q + k_1)$ أي: $p \,/\, (x - a)$

و بالتالي : $\boxed{x \equiv a[p]}$ (4)

من (2) و (3) نستنتج أن : $x-(k_2q+b)=k_3pq$

إذن : $(x-b)=q(k_3p+k_2)$

و منه : $q\,/\,(x-b)$ يعني : $\boxed{x\equiv b[q]}$ (5)

من (4) و (5) نستنتج أن x حل للنظمة $(\mathcal{S})$.

■ **4**

من السؤالين (2) و (3) نستنتج التكافؤ التالي :

$$pq\,/\,(x-x_0) \Leftrightarrow x \text{ حل للنظمة } (\mathcal{S})$$

إذن : $x\equiv x_0[pq] \Leftrightarrow$ x حل للنظمة $(\mathcal{S})$

إذن مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$ هي : $\overline{x_0}$

نشير إلى أن $\overline{x_0}$ عنصر من الفضاء المتجهي : $\mathbb{Z}/(pq)\mathbb{Z}$

<u>بتعبير آخر</u> : مجموعة حلول النظمة $(\mathcal{S})$ هي جميع الأعداد النسبية التي يكون باقي قسمتها على pq مساويا لـ x_0 .

■ **5**

نريد أن نحل في $\mathbb{Z}$ النظمة $(\mathcal{S}_0)$ التالية : $(\mathcal{S}_0):\begin{cases} x\equiv 1[8] \\ x\equiv 3[13]\end{cases}$

الأسئلة السابقة تعتبر دراسة نظرية لحلول النظمة : $\begin{cases} x\equiv a[p] \\ x\equiv b[q]\end{cases}$

مع : $p\wedge q=1$

و السؤال الخامس عبارة عن تطبيق عددي لنتائج تلك الدراسة

ليكن x حلا للنظمة $(\mathcal{S}_0)$.

هذا يعني : $x\equiv x_0[8\times 13]$

لنحسب الآن x_0 . نضع : $p=8$ و $q=13$

<u>لدينا</u> :

المقسوم	المقسوم عليه	الخارج	الباقي		
13	8	1	5	$\longmapsto$ $\boxed{5=13-8}$	(1)
8	5	1	3	$\longmapsto$ $\boxed{3=8-5}$	(2)
5	3	1	2	$\longmapsto$ $\boxed{2=5-3}$	(3)
3	2	1	1	$\longmapsto$ $\boxed{1=3-2}$	(4)

ننطلق من النتيجة (4) .

(4) $\boxed{1=3-2}$ $\overset{\text{حسب (3)}}{\Longrightarrow}$ $1=3-(5-3)$

يعني : $1=2\times 3-5$

$\overset{\text{حسب (2)}}{\Longrightarrow}$ $1=2(8-5)-5$

يعني : $1=2\times 8-3\times 5$

$\overset{\text{حسب (1)}}{\Longrightarrow}$ $1=2\times 8-3(13-8)$

يعني : $\boxed{1=5\times 8-3\times 13}$

من هذه الكتابة الأخيرة نستنتج أن : $\boxed{u_0=5}$ و $\boxed{v_0=-3}$

و منه :
$$\begin{aligned} x_0 &= 3pu_0+qv_0 \\ &= (3\times 8\times 5)-(13\times 3) \\ &= 81 \end{aligned}$$

إذن نستنتج التكافؤ التالي :

$$x\equiv 81[104] \Leftrightarrow x \text{ حل النظمة } (\mathcal{S}_0)$$

و بالتالي : $\boxed{x=104k+81 \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}}$

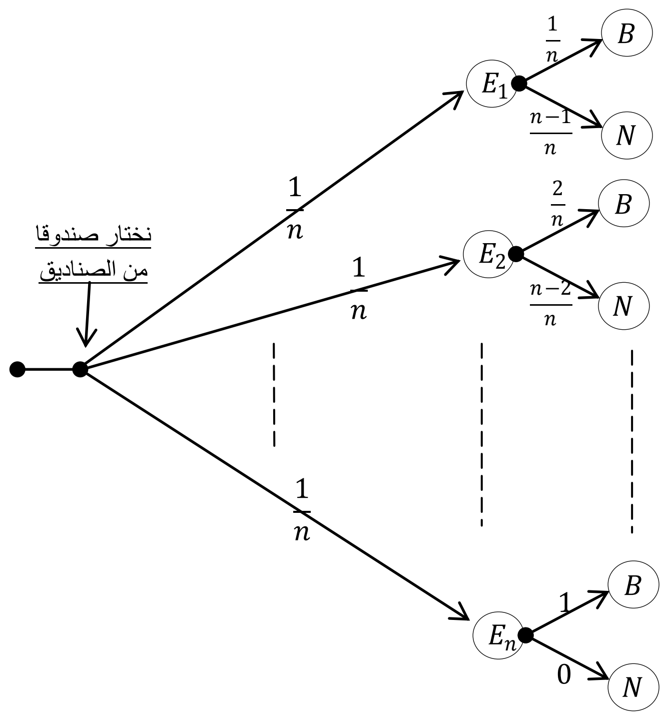
<u>**التمرين الثاني : (2,0 ن)**</u>

■ **1**

في جل مراحل هذا التمرين، نشتغل بـ : $1\leq i\leq n$

نضع :
$E_i=$ " اختيار الصندوق رقم i "
$B=$ " سحب كرة بيضاء "
$N=$ " سحب كرة سوداء "

نحول التجربة الواردة في التمرين إلى شجرة الاحتمالات التالية :



انطلاقا من هذه الشجرة نستنتج أن :

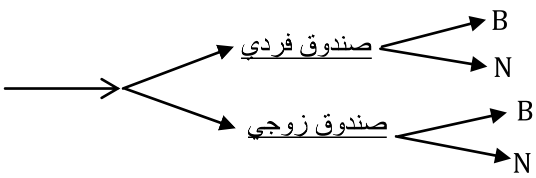
$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap E_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\times\frac{i}{n}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i$$
$$=\frac{n(n+1)}{2n^2}$$
$$=\boxed{\frac{(n+1)}{2n}}$$

■ ②

في هذا السؤال لا يهمنا لون الكرة و يمكن إعادة صياغة السؤال بالطريقة التالية :

" ما هو احتمال اختيار صندوق فردي من بين n صندوق "

و هذه التجربة يمكن نمذجتها بالشجرة التالية :



من جهة أخرى لدينا n عدد فردي

إذن في المجموعة $\{1;2;3\ \cdots;n\}$ يوجد $\frac{(n+1)}{2}$ عدد فردي.

إذن :
$$p(\text{صندوق فردي})=\frac{\text{عدد الصناديق الفردية}}{\text{عدد الصناديق}}=\frac{\frac{(n+1)}{2}}{n}=\boxed{\frac{(n+1)}{2n}}$$

■ ③

$B_I=$ " الحصول على كرة بيضاء علما أن السحب تم من صندوق رقمه عدد فردي "

بالعودة إلى شجرة الإحتمالات السابقة نكتب :

$$P(B_I)=\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{فردي}}}^{n}P(B\cap E_i)=\sum_{\substack{i=1\\ i\ \text{فردي}}}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1\\ i=2k+1}}^{n}i$$
$$=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(2k+1)=\frac{1}{n^2}\left(2\left(\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}k\right)+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{2\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2}+\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)$$
$$=\frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{n-1}{2n^2}=\frac{n^2-1}{4n^2}+\frac{2(n-1)}{4n^2}$$
$$=\frac{n^2+2n-3}{4n^2}$$
$$=\boxed{\frac{(n-1)(n+3)}{4n^2}}$$

التمرين الثالث : (3,0 ن)

■ ① أ

لدينا : $(H):\ \{M(z)/z^2+\bar{z}^2-|z|^2=1\}$

نضع : $z=x+iy$

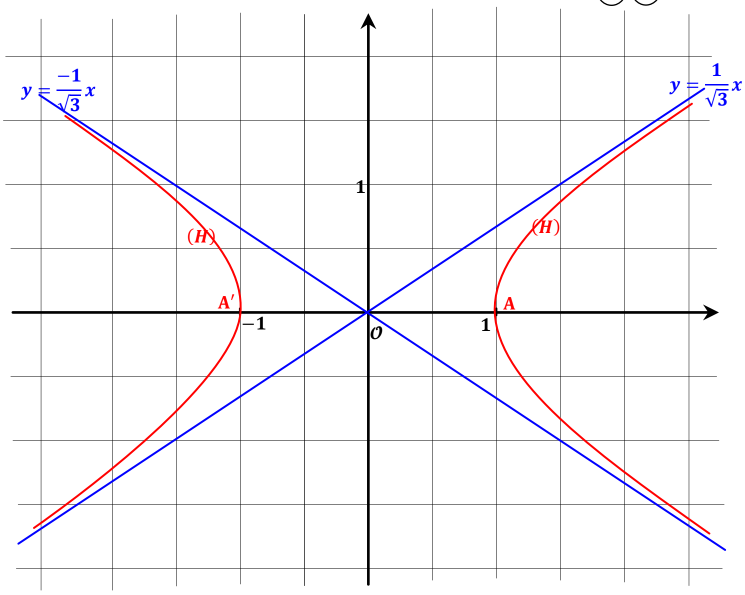
$$M(z)\epsilon\ (H)\iff(x+iy)^2+(x-iy)^2-(x^2+y^2)=1$$
$$\iff x^2-3y^2=1$$
$$\iff\boxed{\frac{x^2}{1^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=1}$$

إذن (H) هذلول مركزه : $O(0,0)$

و رأساه : $A(1,0)$ و $A'(-1,0)$

و مقارباه : $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ و $y=\frac{-1}{\sqrt{3}}x$

■ ① ج



■ ② أ

لتكن $M(a)$ و $M(b)$ نقطتين من (H)

نضع : $\varphi(a,b) = a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}$

من أجل اختصار الكتابة نضع مؤقتا : $\varphi(a,b) = \varphi$

لدينا : $M(a)$ و $M(b)$ نقطتان من (H) .

إذن : $\begin{cases} a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1 \\ b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2 = 1 \end{cases}$

نضرب المتساويتين طرفا بطرف نحصل على :

$$(a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2)(b^2 + \bar{b}^2 - |b|^2) = 1$$

يعني :

$$\begin{aligned} &\left((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2\right) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ &+ (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &= 1 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right) - |ab|^2 \end{aligned}$$

و لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi\bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab})(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= 3|ab|^2 + \left((a\bar{b})^2 + (\bar{a}b)^2\right) - (a^2|b|^2 + b^2|a|^2) \\ &\quad + (\bar{a}^2|b|^2 + \bar{b}^2|a|^2) \\ &= 3|ab|^2 + 1 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right) - |ab|^2 \end{aligned}$$

إذن : $(*)\ \boxed{\varphi\bar{\varphi} = 2|ab|^2 + 1 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right)}$

من جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} \varphi - \bar{\varphi} &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \overline{ab} \end{aligned}$$

إذن : $(**)\ \boxed{\varphi - \bar{\varphi} = ab - \overline{ab}}$

و منه :

$$\begin{aligned} (\varphi - \bar{\varphi})^2 &= \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2 \end{aligned}$$

يعني :

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - 2\varphi\bar{\varphi} &= (\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - \varphi\bar{\varphi}) - \varphi\bar{\varphi} \\ &= (ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2 \end{aligned}$$

و منه :

$$\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = \varphi\bar{\varphi} + \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2\right)$$

باستعمال العلاقة $(*)$ نحصل على :

$$\begin{aligned} \varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 &= 2|ab|^2 - \left((ab)^2 + (\overline{ab})^2\right) + 1 \\ &+ (ab)^2 + (\overline{ab})^2 - 2|ab|^2 = 1 \end{aligned}$$

حصلنا إذن على العلاقة التالية $\boxed{\varphi^2 + \bar{\varphi}^2 - |\varphi|^2 = 1}$

أو باستعمال الترميز الأصلي

$$\boxed{\left(\varphi(a,b)\right)^2 + \overline{\left(\varphi(a,b)\right)}^2 - \left|\left(\varphi(a,b)\right)\right|^2 = 1}$$

و بالتالي : $M\left(\varphi(a,b)\right)$ نقطة من (H) .

■ ② ب

$$\varphi(z,1) = z + \bar{z} - \bar{z} = z$$

$$\begin{aligned} \varphi(z,\bar{z}) &= zz + \bar{z}\bar{z} - \overline{z\bar{z}} \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - \bar{z}z \\ &= z^2 + \bar{z}^2 - |z|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

■ ③

نريد أن نبين أن $*$ تجميعي و تبادلي و يقبل عنصرا محايدا
و كل عنصر يمتلك مماثلا في (H) بالقانون $*$.

نحتاج في البداية أن نبين الخاصيتين التاليتين و المتعلقتين بهذا التمرين فقط.

$$\overset{(1)}{\boxed{\varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b}) = ab - \overline{ab}}} \quad \text{و} \quad \overset{(2)}{\boxed{\overline{\varphi(a,b)} = \varphi(\bar{a},\bar{b})}}$$

لدينا :

$$\begin{aligned} \overline{\varphi(a,b)} &= \overline{(\bar{a}b + a\bar{b} - \overline{ab})} \\ &= a\bar{b} + \bar{a}b - ab \\ &= \varphi(\bar{a},\bar{b}) \end{aligned}$$

و لدينا كذلك :

$$\begin{aligned} \varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b}) &= (a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab}) - (\bar{a}b + a\bar{b} - ab) \\ &= ab - \overline{ab} \end{aligned}$$

الآن لتكن $M(a)$ و $M(b)$ و $M(c)$ ثلاثة عناصر من (H) .

لدينا :

$$\begin{aligned} (M(a) * M(b)) * M(c) &= M\left(\varphi(a,b)\right) * M(c) \\ &= M\left(\varphi(a,b)\right) * M(c) \\ &= M[\varphi(\varphi(a,b),c)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c\overline{\varphi(a,b)} + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\overline{\varphi(a,b)} \\
&= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}\varphi(a,b) - \bar{c}\varphi(\bar{a},\bar{b}) \\
&= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}\left(\varphi(a,b) - \varphi(\bar{a},\bar{b})\right) \\
&= c\varphi(\bar{a},\bar{b}) + \bar{c}(ab - \overline{ab}) \\
&= c(\bar{a}b + a\bar{b} - ab) + \bar{c}ab - \overline{abc} \\
&= \boxed{\bar{a}bc + ca\bar{b} - abc + \bar{c}ab - \overline{abc}} \quad (3)
\end{aligned}$$

بنفس الطريقة لدينا :

$$\begin{aligned}
M(a) * \left(M(b) * M(c)\right) &= M(a) * M\left(\varphi(b,c)\right) \\
&= M\left(\varphi(a,\varphi(b,c))\right) \\
&= \bar{a}\varphi(b,c) + a\varphi(\bar{b},\bar{c}) - \bar{a}\varphi(\bar{b},\bar{c}) \\
&= a\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}\left(\varphi(b,c) - \varphi(\bar{b},\bar{c})\right) \\
&= a\varphi(\bar{b},\bar{c}) + \bar{a}(bc - \overline{bc}) \\
&= a(\bar{b}c + b\bar{c} - bc) + \bar{a}bc - \overline{abc} \\
(4) \quad &\boxed{= \bar{b}ca + ab\bar{c} - abc + \bar{a}bc - \overline{abc}}
\end{aligned}$$

من (3) و (4) نستنتج أن :

$$\left(M(a) * M(b)\right) * M(c) = M(a) * \left(M(b) * M(c)\right)$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في (H) .

التبادلية :

في البداية لدينا:

$$\begin{aligned}
\varphi(a,b) &= a\bar{b} + \bar{a}b - \overline{ab} \\
&= b\bar{a} + \bar{b}a - \overline{ba} \\
&= \varphi(b,a)
\end{aligned}$$

إذن : $(5)\ \boxed{\varphi(a,b) = \varphi(b,a)}$

ليكن a و b عددين حقيقيين .

لدينا :

$$\begin{aligned}
M(a) * M(b) &= M\left(\varphi(a,b)\right) \\
&= M\left(\varphi(b,a)\right) \\
&= M(b) * M(a)
\end{aligned}$$

و بالتالي : $*$ قانون تبادلي في (H)

العنصر المحايد :

ننطلق من الكتابة : $M(a) * M(e) = M(a)$.

يعني : $M\left(\varphi(a,e)\right) = M\left(\varphi(a,1)\right)$

يعني : $\varphi(a,e) = \varphi(a,1)$

ومنه : $e = 1$

يعني : $M(a) * M(1) = M(a)$

و نشير هنا إلى أن : $M(1) \epsilon (H)$ لأن : $1^2 + \bar{1}^2 - |1|^2 = 1$

و بما أن القانون $*$ تبادلي فإن :

$$M(a) * M(e) = M(e) * M(a) = M(a)$$

إذن $M(1)$ هو العنصر المحايد للقانون $*$ في (H) .

التماثل : ليكن : $M(a), M(x)\ \epsilon\ (H)$

ننطلق من الكتابة : $M(a) * M(x) = M(1)$

يعني : $M\left(\varphi(a,x)\right) = M\left(\varphi(a,\bar{a})\right)$

يعني : $\varphi(a,x) = \varphi(a,\bar{a})$

و منه : $x = \bar{a}$

بما أن $M(a)\ \epsilon\ (H)$ فإن $a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2 = 1$

و منه : $\overline{a^2 + \bar{a}^2 - |a|^2} = 1$ يعني : $\bar{a}^2 + a^2 - |a|^2 = 1$.

و منه : $M(\bar{a})\ \epsilon\ (H)$

و بالتالي : كل عنصر $M(a)$ من (H) يقبل مماثلا $M(\bar{a})$ من (H) بالقانون $*$.

خلاصة : $\boxed{((H),*)\ \text{زمرة تبادلية .}}$

التمرين الرابع : (3,0 ن)

■ 1 أ

لدينا $\mathcal{F}$ جزء غير فارغ من المجموعة : $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

لأن : $\mathcal{M}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\ \epsilon\ \mathcal{F}$

و لدينا :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(a,b) - \mathcal{M}(c,d) &= \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c+d & -d \\ 5d & c-3d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a-c)-(b+d) & -b-d \\ 5(b-d) & (a-c)-3(b+d) \end{pmatrix} \\
&= \mathcal{M}\left((a-c),(b-d)\right)\ \epsilon\ \mathcal{F}
\end{aligned}$$

إذن : $\boxed{(\mathcal{F},+)\ \text{زمرة جزئية من}\ (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)}$

ليكن : $\lambda \in \mathbb{R}$ و $\mathcal{M}(a,b) \in \mathcal{F}$.

$$\lambda\mathcal{M}(a,b) = \lambda\begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a+\lambda b & -\lambda b \\ 5\lambda b & \lambda a-3\lambda b \end{pmatrix}$$
$$= \mathcal{M}(\lambda a, \lambda b) \in (\mathcal{F})$$

إذن $\mathcal{F}$ جزء مستقر بالنسبة للقانون الخارجي $(\cdot)$.

و نعلم أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و $\mathcal{F}$ جزء من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

إذن الخاصيات التالية الخاصة بالمجموعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ تبقى صالحة للمجموعة $\mathcal{F}$.

و منه :

$$(\forall\, M, M' \in \mathcal{F}), (\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}) ; \begin{cases} \alpha(M+M') = \alpha M + \alpha M' \\ (\alpha+\beta)M = \alpha M + \beta M \\ (\alpha\beta)M = \alpha(\beta.M) \\ I.M = M \end{cases}$$

إذن : $\boxed{(\mathcal{F},+,\cdot) \text{ فضاء متجهي حقيقي.}}$

■ ① ب

يكفي أن تكون الأسرة (I,J) مولدة للفضاء $(\mathcal{F},+,\cdot)$ و أن تكون أسرة حرة.

لدينا : $(\forall \mathcal{M}(a,b) \in \mathcal{F}) : \mathcal{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a+b & -b \\ 5b & a-3b \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & -b \\ 5b & -3b \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \mathcal{M}(a,b) = aI + bJ$$

و منه : الأسرة (I,J) مولدة للفضاء $\mathcal{F}$

ليكن α و β عددين حقيقيين بحيث : $\alpha I + \beta J = 0$.

يعني : $\begin{pmatrix} \alpha+\beta & -\beta \\ 5\beta & \alpha-3\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

يعني : $\begin{cases} \alpha+\beta = 0 \\ -\beta = 0 \\ 5\beta = 0 \\ \alpha - 3\beta = 0 \end{cases}$ و منه : $\alpha = \beta = 0$

إذن الأسرة (I,J) حرة .

و بالتالي (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $\mathcal{F}$ و بُعدُهُ يساوي 2

■ ②

ليكن α عددا عقديا لا ينتمي إلى $\mathbb{R}$

إذن : $(\exists \alpha_1 \in \mathbb{R}), (\exists \alpha_2 \in \mathbb{R}^*) \; ; \; \alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$

ليكن $z = x + iy$ عددا عقديا .

نضع : $z = m_1 + m_2\alpha$

$$\Longrightarrow \quad z = m_1 + m_2(\alpha_1 + i\alpha_2)$$

$$\Longrightarrow \quad z = m_1 + m_2\alpha_1 + im_2\alpha_2$$

بما أن : $z = x + iy$ فإن : $\begin{cases} x = m_1 + m_2\alpha_1 \\ y = m_2\alpha_2 \end{cases}$

و منه : $\begin{cases} m_1 = \left(x - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}y\right) \in \mathbb{R} \\ m_2 = \left(\frac{y}{\alpha_2}\right) \in \mathbb{R} \end{cases}$

يعني : $(\forall z \in \mathbb{C}), (\exists (m_1,m_2) \in \mathbb{R}^2) \; ; \; z = m_1 + m_2\alpha$

إذن $\boxed{\{1;\alpha\} \text{ أسرة مولدة لـ } \mathbb{C} \text{ .}}$ (8)

لتكن $x + \alpha y$ تأليفة خطية منعدمة لـ 1 و α يعني : $x + \alpha y = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x + y(\alpha_1 + i\alpha_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + y\alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 y = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

إذن $\boxed{\{1;\alpha\} \text{ أسرة حرة}}$ (9)

من (8) و (9) نستنتج أن $\{1;\alpha\}$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

■ ③ أ

نضع : $z = x + \alpha y$ بحيث : $x \in \mathbb{R}$ و $y \in \mathbb{R}$.

نعتبر التطبيق ψ المعرف بما يلي :

$$\psi \;:\; \mathbb{C} \longrightarrow F$$
$$z \longrightarrow M(a,b)$$

لدينا : $\alpha = 0 + \alpha 1$ إذن : $\psi(\alpha) = M(0,1) = J$.

و لدينا : $J^2 + 2(I+J) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -10 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و منه : $J^2 + 2(\mathrm{I}+\mathrm{J}) = \Theta$ يعني : $J^2 = -2(I+J)$

■ ③ ب

ليكن z و z' عددين عقديين بحيث : $z = x + \alpha y$ و $z' = c + \alpha d$

لكي يكون ψ تشاكلا يكفي أن يحقق : $\psi(zz') = \psi(z) \times \psi(z')$

يعني : $\psi\big((x+\alpha y)\times(c+\alpha d)\big) = \psi(x+\alpha y) \times \psi(c+\alpha d)$

لدينا : $\psi(x+\alpha y) \times \psi(c+\alpha d) = \mathcal{M}(x,y) \times \mathcal{M}(c,d)$

$$= (xI + yJ) \times (cI + dJ)$$

$$= xcI + xdJ + ycJ + ydJ^2$$

$$= xcI + xdJ + ycJ + yd\big(-2(I+J)\big)$$

$$= (xc - 2yd)I + (xd + yc - 2yd)J$$

$$= \mathcal{M}\big((xc-2yd);(xd+yc-2yd)\big)$$

$$= \psi\big((xc-2yd) + (xd+yc-2yd)\alpha\big)$$

$$= \psi\big((xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha\big)$$

لكي يكون ψ تشاكلا تقابليا يكفي أن يحقق :

$$\psi\big((xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha\big) = \psi(xc+\alpha xd+\alpha yc+\alpha^2 yd)$$

يعني : $(xc-2yd)+(xd+yc-2yd)\alpha = xc+\alpha xd+\alpha yc+\alpha^2 yd$

نرتب جيدا هذه المتساوية نحصل على :

$$(yd)\alpha^2+(2yd)\alpha+(2yd)=0$$

يعني : $\alpha^2+2\alpha+2=0$

نحل هذه المعادلة بالطريقة التقليدية نجد :

$\alpha=-1+i$ أو $\alpha=-1-i$

و نشير كذلك إلى أن لكل عنصر $\mathcal{M}(x,y)$ يوجد عدد عقدي وحيد $z=x+y\alpha$ بحيث : $\varphi(z)=\mathcal{M}(x,y)$

و ذلك لأن $(1,\alpha)$ أساس للفضاء المتجهي العقدي $\mathbb{C}$

أو بتعبير آخر : كل عنصر z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل تأليفة خطية للعددين 1 و α .

<u>خلاصة</u> : من أجل $\alpha=i-1$ أو $\alpha=-1-i$

لدينا ψ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C},\times)$ نحو $(\mathcal{F},\times)$.

■ **4**

نأخذ : $\alpha=-1+i$

لدينا :

$$\alpha=\sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$
$$=\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{4}i}=\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]$$

ومنه : حسب $(Moivre)$:

$$\alpha^{2007}=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{2007\times 3\pi}{4}\right]$$
$$=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{6021\pi}{4}\right]$$

و بما أن : $\frac{6021\pi}{4}=2\times 752\times\pi+\frac{5\pi}{4}$

فإن : $\frac{6021\pi}{4}\equiv\frac{5\pi}{4}\,[2\pi]$

و منه : $\alpha^{2007}=\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{5\pi}{4}\right]$

لنكتب الآن α^{2007} في الأساس $(1,\alpha)$.

ليكن x و y عددين حقيقيين بحيث : $\boxed{\alpha^{2007}=x\cdot 1+y\cdot\alpha}$ $(*)$

هدفنا هو تحديد x و y

لدينا :

$$x+\alpha y=[x,0]+\left[\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right]\times[y,0]$$
$$=[x,0]+\left[\sqrt{2}y,\frac{3\pi}{4}\right]$$

إذن بالإستعانة بالمتساوية $(*)$ نحصل على :

$$\left[\sqrt{2}^{2007},\frac{5\pi}{4}\right]=[x,0]+\left[\sqrt{2}y,\frac{3\pi}{4}\right]$$

و منه : الجزءان الحقيقيان لطرفي هذه المتساوية متساويان. و الجزءان التخيليان متساويان كذلك. و من ثم نحصل على النظمة $(\mathcal{S})$ التالية :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=x+\sqrt{2}y\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\\ \sqrt{2}^{2007}\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}y\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\end{cases}$$

لدينا : $\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

و لدينا كذلك: $\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

إذن النظمة $(\mathcal{S})$ تصبح :

$$(\mathcal{S}):\begin{cases}\sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=x+\sqrt{2}y\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\\ \sqrt{2}^{2007}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

من المعادلة الثانية نستنتج أن : $y=-2^{1003}$

و لدينا حسب المعادلة الأولى :

$$x=-2^{1003}-(2^{1003}\times 2^0)=-2^{1004}$$

و بالتالي : $\boxed{\alpha^{2007}=(-2^{1003})+(-2^{1004})\alpha}$

بعد حصولنا على هذه الصيغة الثمينة تصبح التتمة سهلة و في المتناول

لدينا :
$$\begin{aligned} J^{2007} &= J \times J \times J \times \cdots \times J \\ &= \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \psi(\alpha) \times \cdots \times \psi(\alpha) \\ &= \psi(\alpha \times \alpha \times \alpha \times \cdots \times \alpha) \\ &= \psi(\alpha^{2007}) \\ &= \psi((-2^{1003}) + (-2^{1004})\alpha) \\ &= \mathcal{M}((-2^{1003})\,;\,(-2^{1004})) \\ &= (-2^{1003})I + (-2^{1004})J \end{aligned}$$

و بالتالي :
$$\boxed{J^{2007} = (-2^{1003})I + (-2^{1004})J}$$

<u>التمرين الخامس : (9,0 ن)</u>

■(I)(1)(أ)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

لدينا : $g'(x) = 1 + e^{-x} > 0$

إذن : g دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

■(I)(1)(ب)

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (1 + x - e^{-x}) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} (1 + x - e^{-x}) = +\infty$$

جدول تغيرات الدالة g .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

■(I)(1)(ج)

لدينا g دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن فهي تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $g(\mathbb{R})$.

و لدينا :
$$\begin{aligned} g(\mathbb{R}) = g(]-\infty, +\infty[) &= \left]\lim_{x \to -\infty} g(x) \,;\, \lim_{x \to -\infty} g(x)\right[\\ &=]-\infty\,;\,+\infty[= \mathbb{R} \end{aligned}$$

لدينا : $0 \epsilon \mathbb{R}$ إذن يوجد عدد وحيد x_0 من $\mathbb{R}$ بحيث : $g(x_0) = 0$

و لدينا حسب جدول تغيرات الدالة g : $g(0) = 0$

إذن : 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $g(x) = 0$.

■(I)(2)(أ)

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

■(I)(2)(ب)

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{-g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{-(1 + e^{-x})^2}{(1 + x - e^{-x})^2}$$

■(I)(2)(ج)

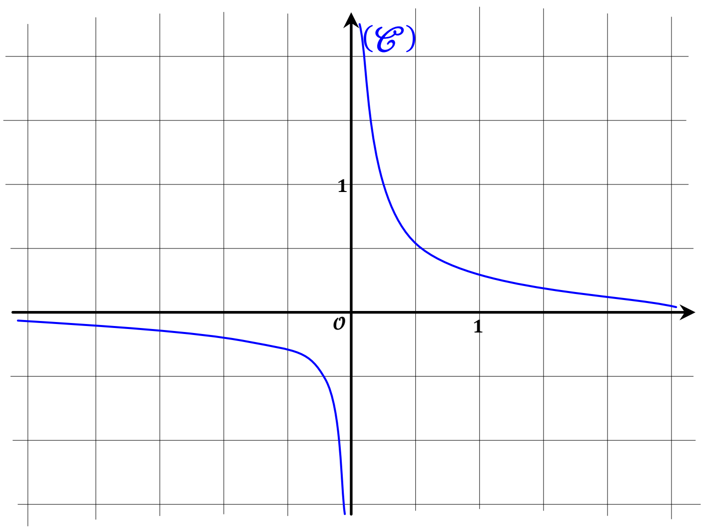
لدينا : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}^*)\ ;\ f'(x) < 0$

إذن : f دالة تناقصية على $\mathbb{R}^*$.

<u>جدول تغيرات الدالة f .</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	
f	0	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	0

■(I)(2)(د)



■(I)③(أ)

نضع : $h(x) = f(x) - n$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x\to 0^+}(f(x)-n) = +\infty$

و $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-n) = -n$

و لدينا h دالة تناقصية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$ لأن : $h'(x) = f'(x) < 0$

و بما أن f متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

فإن : h متصلة و تناقصية على $\mathbb{R}_+^*$.

و منه : h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $]-n,+\infty[$

و بالتالي : $(\exists! x_n \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ h(x_n) = 0$

أي : $\boxed{(\exists! x_n \epsilon \mathbb{R}_+^*)\ ;\ f(x_n) = n}\ (*)$

■(I)③(ب)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم

لدينا : $(n+1) > n$ و منه حسب $(*)$: $f(x_{n+1}) > f(x_n)$

و بما أن f دالة تناقصية فإن : $x_{n+1} < x_n$

و منه : x_n متتالية تناقصية

و بما أنها مصغورة بالعدد 0 يعني : $(\forall n \epsilon \mathbb{N})\ ;\ x_n > 0$

فإنها متقاربة .

■(I)③(ج)

لدينا حسب السؤال :③(أ) $f(x_n) = n$

يعني : $\frac{1}{1 + x_n - e^{-x_n}} = n$

يعني : $(1 + x_n - e^{-x_n}) = \frac{1}{n}$

نجعل n يؤول إلى $(+\infty)$ نحصل على :

$$\lim_{n\to+\infty}(1 + x_n - e^{-x_n}) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$$

يعني : $1 + \ell - e^{-\ell} = 0$ يعني : $(1+\ell) = e^{-\ell}$

سنبرهن الآن بالخلف على أن : $\ell \neq 0$

نفترض إذن أن : $\ell > 0$.

إذن : $e^{-\ell} < 1$ و $1 + \ell > 0$

بما أن : $(1+\ell) = e^{-\ell}$ فإن : $0 < (1+\ell) < 1$.

يعني : $-1 < \ell < 0$

و هذا يتناقض مع كون $\ell > 0$

و بالتالي : $\boxed{\ell = \lim_{x\to+\infty}(x_n) = 0}$

■(II)①(أ)

ننطلق من الكتابة : $f(x) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1 + x - e^{-x}} = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + x - e^{-x} = 1$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = x$$

■(II)①(ب)

نضع : $\varphi(x) = e^{-x} - x$

لدينا φ دالة متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها فرق دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$.

و منه : φ متصلة على المجال $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

و لدينا : $\varphi\left(\frac{1}{e}\right) = e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} - \frac{1}{e} = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} - \frac{1}{e}$

و $\varphi(1) = e^{-1} - 1$

لنحدد الآن إشارة كل من $\varphi\left(\frac{1}{e}\right)$ و $\varphi(1)$

لدينا : $-1 < 0$ إذن $e^{-1} < 1$ يعني : $e^{-1} - 1 < 0$

و منه : $\boxed{\varphi(1) < 0}\ (1)$

و لدينا $e > 1$ إذن $\frac{1}{e} < 1$

يعني : $e^{\left(\frac{1}{e}\right)} < e$ و منه : $\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} > \frac{1}{e}$

إذن : $\boxed{\varphi\left(\frac{1}{e}\right) > 0}\ (2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $\varphi(1) \times \varphi\left(\frac{1}{e}\right) < 0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\boxed{\left(\exists \alpha \epsilon \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right)\ :\ \varphi(\alpha) = 0}$

أو بتعبير آخر : $\boxed{\left(\exists \alpha \epsilon \left]\frac{1}{e}, 1\right[\right)\ :\ e^{-\alpha} = \alpha}$

■(II)②أ

لنبرهن على أن : $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$.

من أجل $n=1$ لدينا $\frac{1}{e} \le y_1 = 1 \le 1$.

نفترض أن : $\frac{1}{e} \le y_n \le 1$; $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$

إذن : $-1 \le -y_n \le -\frac{1}{e}$ و منه : $e^{-1} \le e^{-y_n} \le e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$

إذن : $$\boxed{\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}}} \quad (3)$$

و لدينا $\frac{1}{e} > 0$ إذن $e^{\left(\frac{1}{e}\right)} > 1$

و منه : $$\boxed{\frac{1}{e^{\left(\frac{1}{e}\right)}} < 1} \quad (4)$$

من (3) و (4) نستنتج أن : $\frac{1}{e} \le y_{n+1} \le 1$

و بالتالي حسب مبدأ الترجع : $$\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ \frac{1}{e} \le y_n \le 1}$$

■(II)②ب

نضع : $\varphi(x) = e^{-x}$.

لدينا : φ دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن : φ متصلة و قابلة للإشتقاق على $\overleftrightarrow{]\alpha\,,y_n[}$

لأن : $\overleftrightarrow{]\alpha\,,y_n[} \subset \mathbb{R}$

و منه حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\left(\exists ! \, c \epsilon \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\right) \ : \ \frac{|\varphi(y_n) - \varphi(\alpha)|}{|y_n - \alpha|} = |\varphi'(c)|$$

و منه : $$\boxed{\left(\exists ! \, c \epsilon \overleftrightarrow{]\alpha, y_n[}\right) \ : \ |y_{n+1} - \alpha| = |\varphi'(c)||y_n - \alpha|} \quad (\star)$$

لقد أدخلت الرمز $\overleftrightarrow{]\alpha\,,y_n[}$ لأننا لا نعلم من الأكبر هل α أم y_n

لدينا حسب السؤالين ①ب و ②أ : $\begin{cases} \frac{1}{e} \le \alpha \le 1 \\ \frac{1}{e} \le y_n \le 1 \end{cases}$

بما أن : $c \, \epsilon \, \overleftrightarrow{]\alpha\,,y_n[}$ فإن $\frac{1}{e} \le c \le 1$

و منه : $$\boxed{-e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \le -e^{-c} \le -e^{-1}} \quad (5)$$

نعلم أن العدد الموجب يكون دائما أكبر من العدد السالب .

إذن : $$\boxed{-e^{-1} < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}} \quad (6)$$

من (5) و (6) نستنتج أن : $-e^{-\left(\frac{1}{e}\right)} \le -e^{-c} \le e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$.

يعني : $|\varphi'(c)| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب $|y_n - \alpha|$ نحصل على :

$$|y_n - \alpha||\varphi'(c)| < e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|$$

و منه حسب النتيجة $(\star)$:

$$\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ |y_{n+1} - \alpha| \le e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_n - \alpha|} \quad (\ast\ast)$$

■(II)②ج

انطلاقا من النتيجة $(\ast\ast)$ نستنتج أن :

$$(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ |y_n - \alpha| \le e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-1} - \alpha|$$

و ذلك بتعويض n بـ $(n-1)$

إذن :
$$\begin{aligned} |y_n - \alpha| &\le e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-1} - \alpha| \\ &\le e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}|y_{n-2} - \alpha| \\ &\le \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^3 |y_{n-3} - \alpha| \\ &\le \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^4 |y_{n-4} - \alpha| \\ &\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &\le \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |y_{n-(n-1)} - \alpha| \end{aligned}$$

إذن : $|y_n - \alpha| \le \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |y_1 - \alpha|$

يعني : $|y_n - \alpha| \le \left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha|$

لنحسب الآن نهاية المتتالية : $\left(\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha|\right)$

نعلم أن $\frac{1}{e} > 0$ إذن : $\frac{-1}{e} < 0$ و منه : $e^{\left(\frac{-1}{e}\right)} < 1$

إذن $\left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية أساسها محصور بين 1 و −1

إذن : $\lim\limits_{n\infty}\left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1} = 0$

و منه : $\lim\limits_{n\infty}\left(e^{\left(\frac{-1}{e}\right)}\right)^{n-1} |1 - \alpha| = 0$

و بما أن : $|y_n-\alpha| \le \underbrace{\left(e^{-\left(\frac{1}{e}\right)}\right)^{n-1}}_{tend\ vers\ 0} |1-\alpha|$

فإن : $\lim\limits_{n\infty}|y_n-\alpha| = 0$ يعني : $\lim\limits_{n\infty} y_n = \alpha$

و بالتالي : $(y_n)_{n\ge1}$ متتالية متقاربة و نهايتها هي α .

■(III)①(أ)

ليكن $t>0$ إذن : $e^{-t}<1$

يعني : $-e^{-t} > -1$

$$\Rightarrow \quad (t+1)-e^{-t} > (t+1)-1$$
$$\Rightarrow \quad t+1-e^{-t} > t$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t+1-e^{-t}} < \frac{1}{t}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) < \frac{1}{t}} \quad (1)$$

و لدينا كذلك : $-e^{-t}<0$

$$\Rightarrow \quad (t+1)-e^{-t} < (t+1)$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t+1-e^{-t}} > \frac{1}{t+1}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{f(t) > \frac{1}{t+1}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t>0) \ : \frac{1}{t+1} < \ f(t) \ < \frac{1}{t}}$$

(III)①(ب)

ليكن : $x>0$

لدينا حسب السؤال (أ) $\boxed{(\forall t>0) \ : \frac{1}{t+1} < \ f(t) \ < \frac{1}{t}}$

ندخل التكامل على هذا التأطير نحصل على :

$$\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t+1}\right)dt < \int_x^{2x} f(t)\,dt \ < \int_x^{2x}\left(\frac{1}{t}\right)dt$$

$$\Rightarrow \ [\ln(1+t)]_x^{2x} < F(x) \ < \ [ln(t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow \ \ln(1+2x)-\ln(1+x) < F(x) \ < \ ln(2x)-ln(x)$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) < F(x) \ < \ ln(2)$$

و بما أن :

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{1+2x}{1+x}\right) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+1}\right) = \ln(2)$$

فإن : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \ln(2)$

■(III)②(أ)

ليكن t عددا حقيقيا موجبا .

نضع : $\begin{cases}\varphi(t) = 1-t \\ \psi(t) = 1-t+\dfrac{t^2}{2} \\ h(t) = e^{-t}\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\varphi'(t) = -1 \\ \psi'(t) = t-1 \\ h'(t) = -e^{-t}\end{cases}$

لدينا $t\ge0$ إذن $-t\le0$

و منه : $-e^{-t}\le-1$ يعني : $h'(t)\le\varphi'(t)$

و بما أن $h(0)=\varphi(0)=1$

فإن : $(\forall t\epsilon[0,+\infty[) \ : \ h(t)\le\varphi(t)$

إذن : $\boxed{(\forall t\epsilon[0,+\infty[) \ : \ e^{-t}\le 1-t}$ (1)

من النتيجة (1) نستخلص : $-e^{-t}\ge t-1$

إذن : $h'(t)\ge\psi'(t)$

و بما أن : $h(0)=\psi(0)=1$ فإن : $h(t)\ge\psi(t)$

يعني : $\boxed{(\forall t\epsilon[0,+\infty[) \ : \ e^{-t}\ge 1-t+\frac{t^2}{2}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t\ge0) \ : \ \left(1-t+\frac{t^2}{2}\right) \ge e^{-t} \ge (1-t)}$$

■(III)②(ب)

لدينا :

$$(\forall t\ge0) \ ; \ 1-t\le e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad (\forall t\ge0) \ ; \ t-1\ge -e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad (\forall t\ge0) \ ; \ (t+1)+(t-1)\ge(t+1)-e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad (\forall t\ge0) \ ; \ 2t\ge t+1-e^{-t}$$

$$\Rightarrow\quad (\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq \frac{1}{t+1-e^{-t}}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{(\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq f(t)}\ (*)$$

و لدينا كذلك : $(\forall t \geq 0)\ :\ \left(1 - t + \frac{t^2}{2}\right) \geq e^{-t}$

$$\Rightarrow\quad (\forall t \geq 0)\ ;\ -e^{-t} \geq -1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\quad (\forall t \geq 0)\ ;\ (1+t) - e^{-t} \geq (1+t) - 1 + t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\quad (\forall t \geq 0)\ ;\ (1+t) - e^{-t} \geq 2t - \frac{t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\quad (\forall t \geq 0)\ ;\ (1+t) - e^{-t} \geq \frac{4t - t^2}{2}$$

$$\Rightarrow\quad (\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{1+t-e^{-t}} \leq \frac{2}{4t - t^2}$$

$$\Rightarrow\quad (\forall t \geq 0)\ ;\ f(t) \leq \frac{2}{4t - t^2}$$

و لدينا : $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right) = \frac{2}{4t - t^2}$

إذن : $(**)\ \boxed{(\forall t \geq 0)\ ;\ f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)}$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall t \geq 0)\ ;\ \frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)}$$

■(III) 2 ج

ننطلق من نتيجة السؤال ب :

لدينا : $\frac{1}{2t} \leq f(t) \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)$

$$\Rightarrow\quad \int_x^{2x} \frac{1}{2t}\,dt \leq \int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \frac{1}{2}\int_x^{2x}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{4-t}\right)dt$$

$$\Rightarrow\quad \frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x} \leq F(x) \leq \frac{1}{2}[\ln t]_x^{2x} + \frac{1}{2}[\ln(4-t)]_x^{2x}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\ln 2}{2} \leq F(x) \leq \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right)$$

و بما أن : $\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{4-2x}{4-x}\right) = 0$

فإن : $\lim_{x \to 0^+} F(x) = \frac{\ln 2}{2}$

و بالتالي F متصلة على يمين الصفر.

■(III) 3 أ

لدينا f دالة متصلة على $\mathbb{R}^*$ إذن فهي تقبل دالة أصلية نرمز لها بـ $\mathcal{T}$ بحيث : $\mathcal{T}'(x) = f(x)$.

لدينا : $F(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = [\mathcal{T}(t)]_x^{2x} = \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$

بما أن : $x \to 2x$ و $x \to \mathcal{T}(x)$ دالتين قابلتين للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$ فإن : $x \to \mathcal{T}(2x) - \mathcal{T}(x)$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

و لدينا : $F'(x) = 2\mathcal{T}'(x) - \mathcal{T}'(x)$.

$$= 2f(2x) - f(x)$$

$$= \frac{2}{g(2x)} - \frac{1}{g(x)}$$

$$= \frac{2g(x) - g(2x)}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{2(1 + x - e^{-x}) - (1 + 2x - e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(1 - 2e^{-x} + e^{-2x})}{g(2x)g(x)}$$

$$= \frac{(e^{2x} - 2e^x + 1)}{e^{2x}g(2x)g(x)}$$

$$\boxed{= \frac{(e^x - 1)^2}{e^{2x}g(2x)g(x)}}$$

■(III) 3 ب

بما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ :\ g(x) > 0$ و $g(2x) > 0$

وبما أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)\ ;\ e^{2x} > 0$ و $(e^x - 1)^2 \geq 0$

فإن : $F'(x) \geq 0$

و بالتالي : $\boxed{F \text{ تزايدية قطعا على } \mathbb{R}_+^*}$

■ و الحمد لله رب العالمين ■