



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,5 ن)

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2.

نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لتكن \mathcal{F} مجموعة المصفوفات (x, y) من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$ مع $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

① أ 0,25 ن بين أن \mathcal{F} جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

① ب 0,50 ن بين أن (\mathcal{F}, \times) زمرة غير تبادلية.

② 1,00 ن لتكن G مجموعة المصفوفات $M(x, 0)$ من \mathcal{F} حيث $x \in \mathbb{R}^*$

بين أن G زمرة جزئية للزمرة (\mathcal{F}, \times) .

③ 0,50 ن ليكن $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي \perp المعرف بما يلي :

$$(\forall (x, y) \in E) ; (\forall (a, b) \in E) : (x, y) \perp (a, b) = \left(ax, bx + \frac{y}{a} \right)$$

نعتبر التطبيق : $\varphi : (\mathcal{F}, \times) \rightarrow (E, \perp)$

$$M(x, y) \rightarrow \varphi(M(x, y)) = (x, y)$$

① أ 0,25 ن أحسب : $(1, 1) \perp (2, 3)$ و $(2, 3) \perp (1, 1)$.

① ب 0,50 ن بين أن φ تشاكل تقابلي.

① ج 0,50 ن استنتج بنية (E, \perp) .

التمرين الثاني : (4,0 ن)

m عدد عقدي يخالف 1.

(I) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z : $z^2 - (1 - i)(m + 1)z - i(m^2 + 1) = 0$ (E)

① أ 0,25 ن تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta = [(1 + i)(m - 1)]^2$.

① ب 0,25 ن حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E).

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة (E) يساوي 1 ن 0,50

② نضع $z_2 = m - i$ و $z_1 = 1 - im$ ن 1,00

(II) في حالة $m = e^{i\theta}$ و $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، أكتب z_2 و z_1 على الشكل المثلثي .

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

نعتبر النقط M و M_1 و M_2 التي أحاقها على التوالي هي : m و $z_1 = 1 - im$ و $z_2 = m - i$.

① حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و M_1 و M_2 نقط مستقيمة. ن 0,50

② (i) بين أن التحويل \mathcal{R} الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' التي لحقها $z' = 1 - iz$ هو دوران ينبغي تحديد لحق مركزه Ω و قياسا لزاويته. ن 0,50

ب) بين أن العدد العقدي : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف إذا و فقط إذا كان : $\Re(m) + \Im(m) = 1$ ن 0,50

($\Re(m)$ هو الجزء الحقيقي للعدد m و $\Im(m)$ هو جزءه التخيلي)

ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة. ن 0,50

التمرين الثالث : (3,0 ن)

لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.

① (i) تحقق أن a_n عدد زوجي لكل n من \mathbb{N}^* . ن 0,25

ب) حدد قيم n التي يكون من أجلها $a_n \equiv 0[3]$. ن 0,50

② ليكن p عددا أوليا بحيث $p > 3$.

(i) بين أن : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ و $3^{p-1} \equiv 1[p]$ و $6^{p-1} \equiv 1[p]$. ن 0,75

ب) بين أن p يقسم a_{p-2} . ن 0,75

ج) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي أولي q يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم n بحيث $a_n \wedge q = q$. ن 0,50

($a_n \wedge q$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين a_n و q)

التمرين الرابع : (10 ن)

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم .

نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي .

$f_n(0) = 0$ و $f_n(x) = x(1 - \ln x)^n$; $(\forall x > 0)$

(I) ليكن (\mathcal{E}_n) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

① (i) بين أن الدالة f_n متصلة على اليمين في 0 (يمكن وضع $x = t^n$) . ن 0,50

ب) أدرس قابلية اشتقاق الدالة f_n على اليمين في 0 . ن 0,25

ج) حدد النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_1(x)}{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x}$ ن 1,00

أدرس تغيرات الدالة f_1 .	② أ	0,50 ن
أدرس تغيرات الدالة f_2 .	ب	0,50 ن
أدرس الوضع النسبي للمنحنيين (\mathcal{E}_1) و (\mathcal{E}_2) .	③ أ	0,25 ن
أنشئ المنحنيين (\mathcal{E}_1) و (\mathcal{E}_2) (نقبل $A(1,1)$ نقطة انعطاف للمنحنى (\mathcal{E}_2)) (نأخذ $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm$)	ب	0,50 ن
نعتبر الدالة العددية F للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-\infty, 0]$ بما يلي : $F(x) = \int_{e^x}^1 \frac{f_1(t)}{1+t^2} dt$	(II)	
بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على المجال $]-\infty, 0[$. وأن : $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{(1+e^{2x})}$; $(\forall x < 0)$	① أ	0,50 ن
استنتج منحنى تغيرات الدالة F على المجال $]-\infty, 0]$	ب	0,25 ن
بين أن : $\frac{1}{2} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt$; $(\forall x < 0)$	② أ	0,25 ن
تحقق أن الدالة : $x \rightarrow x^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2} \right)$ هي دالة أصلية للدالة f_1 على المجال $]0, +\infty[$.	ب	0,25 ن
بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{e^x}^1 f_1(t) dt = \frac{3}{4}$	ج	0,25 ن
نفترض أن الدالة F تقبل نهاية منتهية ℓ عندما يؤول x إلى $-\infty$.	③	0,25 ن
بين أن : $\frac{3}{8} \leq \ell \leq \frac{3}{4}$		
لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_1^e f_n(x) dx$	(III)	
بين أن : $u_n \geq 0$; $(\forall n \geq 1)$.	① أ	0,50 ن
حدد إشارة $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ على المجال $[1, e]$.	ب	0,50 ن
بين أن : $u_{n+1} \leq u_n$; $(\forall n \geq 1)$.	ج	0,25 ن
استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 1}$ متقاربة .	د	0,25 ن
بين أن : $u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$; $(\forall n \geq 1)$	② أ	0,50 ن
استنتج بـ cm^2 مساحة حيز المستوى المحصور بين (\mathcal{E}_1) و (\mathcal{E}_2) و المستقيمين $x = 1$ و $x = e$.	ب	0,50 ن
بين أن : $\frac{1}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{(n-1)}$; $(\forall n \geq 2)$	③ أ	0,75 ن
حدد : $\lim_{x \rightarrow +\infty} nu_n$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$	ب	0,50 ن
a عدد حقيقي مخالف للعدد u_1 .	④	
نعتبر المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ المعرفة بما يلي : $v_1 = a$ و $v_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} v_n$; $(\forall n \geq 1)$		
و لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $d_n = v_n - u_n $.		
بين أن : $d_n = \frac{n!}{2^{(n-1)}} d_1$; $(\forall n \geq 1)$	أ	0,25 ن
بين أن : $\frac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$; $(\forall n \geq 2)$	ب	0,25 ن
بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = +\infty$	ج	0,25 ن
استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 1}$ متباعدة .	د	0,25 ن