التمرين الأول : (4,5 ن)

■ 1 أ

لتكن $M(x,y)$ و $M(a,b)$ مصفوفتين من F

لدينا :

$$M(x,y)\times M(a,b)=\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & \frac{1}{x}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & \frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} xa & xb+\frac{y}{a} \\ 0 & \frac{1}{xa}\end{pmatrix}$$

$$=M\left(xa\ ;\ xb+\frac{y}{a}\right)$$

إذن F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

■ 1 ب

لدينا F جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$

إذن $\times$ قانون تركيب داخلي في F

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ و $M(e,f)$ ثلاثة عناصر من F

لدينا :

$$\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f)=M\left(ac\,,ad+\frac{b}{c}\right)\times M(e,f)$$

$$=M\left(eac\,,acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$$

و لدينا كذلك :

$$M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big)=M(a\,,b)\times M\left(ce,cf+\frac{d}{e}\right)$$

$$=M\left(eac\,,acf+\frac{ad}{e}+\frac{b}{ce}\right)$$

و بالتالي :

$$\big(M(a,b)\times M(c,d)\big)\times M(e,f)=M(a,b)\times\big(M(c,d)\times M(e,f)\big)$$

يعني $\boxed{\times \text{ قانون تجميعي في } F\ .}$

ليكن $M(e_1;e_2)$ العنصر المحايد للضرب في F

$$\Leftrightarrow\quad \forall M(a,b)\in F\ ;\quad M(a,b)\times M(e_1;e_2)=M(e_1;e_2)\times M(a,b)=M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow\quad M\left(ae_1\,;ae_2+\frac{b}{e_1}\right)=M(a,b)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} ae_1=a \\ ae_2+\dfrac{b}{e_1}=b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} e_1=1\in\mathbb{R}^* \\ e_2=0\in\mathbb{R}\end{cases}$$

إذن $I=M(1,0)$ هو العنصر المحايد لضرب المصفوفات في F .

لتكن المصفوفة $M(x',y')$ مماثلة المصفوفة $M(x,y)$ بالنسب لـ $\times$ في F .

$$\Leftrightarrow\quad M(x,y)\times M(x',y')=M(x',y')\times M(x,y)=I$$

$$\Leftrightarrow\quad M\left(xx',xy'+\frac{y}{x'}\right)=M(1,0)$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x'=\dfrac{1}{x}\in\mathbb{R}^* \\ y'=-y\in\mathbb{R}\end{cases}$$

إذن كل مصفوفة $M(x,y)$ تمتلك مصفوفة مماثلة $M\left(\frac{1}{x};-y\right)$ بالنسبة للضرب في F .

لدينا $\times$ ليس تبادليا لأن :

$$\begin{cases} M(x,y)\times M(y,x)=M(xy\,,x^2+1) \\ M(y,x)\times M(x,y)=M(xy,y^2+1)\end{cases}$$ و

نلاحظ إذن أن : $(\forall x\neq y)\ ;\ x^2+1\neq y^2+1$

خلاصة : $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية.

■ 2

لدينا G جزء غير فارغ من F لأنها تضم العنصر $M(1,0)$ على الأقل

لتكن $M(a,0)$ و $M(b,0)$ مصفوفتين من G

لدينا :

$$M(b,0)\times\big(M(a,0)\big)'=M(b,0)\times M\left(\frac{1}{a},0\right)$$

$$=M\left(\frac{b}{a}\ ;\ 0\right)$$

لدينا $a\neq 0$ إذن $\frac{b}{a}\neq 0$ و منه : $M\left(\frac{b}{a},0\right)\in G$

و بالتالي : $(G,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(F,\times)$.

■ 3 أ

$$(1,1)\perp(2,3)=\left(2\ ;\ 3+\frac{1}{2}\right)=\left(2\,;\,\frac{7}{2}\right)$$

$$(2,3)\perp(1,1)=\left(2\ ;\ 2+\frac{3}{1}\right)=(2\,,5)$$

■ 3 ب

لتكن $M(a,b)$ و $M(c,d)$ مصفوفتين من F

لدينا :

$$\varphi\big(M(c,d)\times M(a,b)\big)=\varphi\left(M\left(ac\,;bc+\frac{d}{a}\right)\right)$$

$$=\left(ac\,;bc+\frac{d}{a}\right)$$

$$=(c,d)\perp(a,b)$$

$$=\varphi\big(M(c,d)\big)\perp\varphi\big(M(a,b)\big)$$

إذن φ تشاكل من $(F,\times)$ نحو $(E,\perp)$.

ليكن (a,b) عنصرا من E .

نريد حل المعادلة ذات المجهول $M(x,y)$ التالية : $\varphi\big(M(x,y)\big)=(a,b)$

$$\Leftrightarrow\quad (x,y)=(a,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

إذن المعادلة تقبل حلا وحيدا و هو $M(x,y)$

و منه : $\forall(a,b)\in E\ ,\exists!\, M(x,y)\in F\ \ ;\ \ \varphi\big(M(x,y)\big) = (a,b)$

و بالتالي : $\boxed{\varphi \text{ تقابل من } (F,\times) \text{ نحو } (E,\perp)}$

خلاصة : $\boxed{\varphi \text{ تشاكل تقابلي من } (F,\times) \text{ نحو } (E,\perp)}$.

نعلم أن التشاكل التقابلي يحافظ على بنية الزمرة.

<u>بما أن</u> : $(F,\times)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو المصفوفة $M(1,0)$

و كل مصفوفة $M(x,y)$ تقبل مماثلة $M\left(\frac{1}{x},-y\right)$ بالنسبة لـ $\times$ في F .

<u>فإن</u> : $(E,\perp)$ زمرة غير تبادلية عنصرها المحايد هو الزوج $\varphi\big(M(1,0)\big)$

و كل زوج (x,y) يقبل مماثلا $\varphi\left(M\left(\frac{1}{x},-y\right)\right)$.

و لدينا :
$$\begin{cases} \varphi\big(M(1,0)\big) = (1,0) \\ \varphi\left(M\left(\frac{1}{x},-y\right)\right) = \left(\frac{1}{x},-y\right) \end{cases}$$

<u>التمرين الثاني : (4,0 ن)</u>

■(I)①أ

$$\begin{aligned} \Delta &= (1-i)^2(m+1)^2 + 4i(m^2+1) \\ &= -2i(m^2+2m+1) + 4im^2 + 4i \\ &= 2im^2 - 4im + 2i \\ &= 2i(m^2-2m+1) \\ &= \boxed{(1+i)^2(m-1)^2} \end{aligned}$$

■(I)①ب

$$z_1 = (1-im) \qquad \text{و} \qquad z_2 = (m-i)$$

■(I)①ج

نضع : $m = re^{i\theta}$ و ننطلق من : $z_1z_2 = 1$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (1-im)(m-i) = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad m - i - m^2 i - m = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad m^2 = -1 + i \\ &\Leftrightarrow \quad r^2e^{2i\theta} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &\Leftrightarrow \quad r^2e^{2i\theta} = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{8} + k\pi \quad ; \quad k \in \{0,1\} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt[4]{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{8} \quad \text{أو} \quad \theta = \dfrac{11\pi}{8} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{3i\pi}{8}} \\ m_2 = \sqrt[4]{2}\, e^{\frac{11i\pi}{8}} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} m_1 = \sqrt[4]{2}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{2}+4}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \\ m_2 = \sqrt[4]{2}\left(-\sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{2}+4}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+2}{4}}\right) \end{cases}$$

■(I)②

في هذا السؤال يجب ضبط جميع قواعد الصيغ المثلثية .

نضع : $z_1 = re^{i\varphi}$

لدينا :
$$\begin{aligned} z_1 &= 1 - im \\ &= 1 - ie^{i\theta} \\ &= 1 - i(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= (1+\sin\theta) - i\cos\theta \end{aligned}$$

إذن هدفنا هو ايجاد المجهولين r و φ بدلالة θ بحيث :

$$(1+\sin\theta) - i\cos\theta = r\cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} r\cos\varphi = 1 + \sin\theta \\ r\sin\varphi = -\cos\theta \end{cases}$$

لدينا : $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$

إذن : $(1+\sin\theta)^2 + \cos^2\theta = r^2$

و منه :
$$\begin{aligned} r^2 = 2(1+\sin\theta) &= 2\left(\sin\frac{\pi}{2} + \sin\theta\right) \\ &= 2\left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= 4\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

إذن : $\boxed{r = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$

نعوض r بقيمته في المعادلة الثانية من النظمة نحصل على :

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{-\cos\theta}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\cos(\pi-\theta)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\dfrac{-\pi}{2}+\theta\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)} \\ &= \frac{-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$= \frac{-2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)[k\pi]}$

و بالتالي : $\boxed{z_1 = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

بنفس الطريقة نضع : $z_2 = re^{i\varphi}$

$$z_2 = m - i = e^{i\theta} - i = \cos\theta + i(\sin\theta - 1)$$

هدفنا هو البحث عن r و φ بدلالة θ بحيث :

$$r\cos\varphi + i\, r\sin\varphi = \cos\theta + i(\sin\theta - 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos\theta = r\cos\varphi \\ \sin\theta - 1 = r\sin\varphi\end{cases}$$

لدينا : $(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = r^2$

إذن : $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta - 1)^2 = r^2$

و منه : $r^2 = 2(1 - \sin\theta)$

أي : $r^2 = 2(1 + \sin(-\theta))$

نعلم حسب الجزء الأول من هذا السؤال أن :

$$2(1+\sin\theta) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $2(1+\sin(-\theta)) = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

يعني : $r^2 = 4\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

و منه : $\boxed{r = 2\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$

<u>ملاحظة</u> : لقد تم اختيار القيمة الموجبة لـ r لأن معيار عدد عقدي يكون دائما عددا موجبا.

نعوض r بقيمته في المعادلة الأولى من النظمة نحصل على :

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\cos\theta}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-\cos(\pi-\theta)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-\sin\left(\frac{-\pi}{2}+\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{-2\sin\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \frac{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos\varphi = \cos\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$$

إذن : $\boxed{\varphi \equiv \left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)[k\pi]}$

و بالتالي : $\boxed{z_2 = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{-\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$

■ (II) 1

$\Leftrightarrow \quad M \in (M_1M_2)$ ، M و M_1 و M_2 نقط مستقيمية .

$$\Leftrightarrow \quad \frac{z_1 - m}{z_2 - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1 - im - m}{m - i - m} \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad i + m - im \in \mathbb{R}$$

نضع : $m = x + iy$

$$\Leftrightarrow \quad (x+y) + i(y - x + 1) \ \in \ \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad y - x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{y = x - 1}$$

إذن مجموعة النقط M تشكل مستقيما معادلته $y = x - 1$.

■ (II) 2 أ

ننطلق من $z' = 1 - iz$

نريد كتابة هذه المتساوية على شكل :

$z' = e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$ بحيث ω عدد عقدي .

لدينا : $\begin{cases} e^{i\theta} = -i \\ -\omega e^{i\theta} + \omega = 1\end{cases}$

إذن : $\begin{cases}\theta = \frac{-\pi}{2}\\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\end{cases}$

و منه : $z' = e^{\frac{-\pi i}{2}}\left(z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$

إذن التحويل R عبارة عن دوران مركزه النقطة $\Omega\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)$ و زاويته $\frac{-\pi}{2}$

■(II)②ب

نضع : $\Im m(m) = y$ و $\Re e(m) = x$ و $m = x + iy$

$\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ تخيلي صرف . $\Leftrightarrow \overline{\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right)} = -\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\overline{m} + i - 1 - i\overline{m}}{i} = \frac{m - i - 1 + im}{i}$$

$$\Leftrightarrow (x - iy) + i - 1 - i(x - iy) = (x + iy) - i - 1 + i(x + iy)$$

$$\Leftrightarrow -2ix + 2i - 2iy = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Re e(m) + \Im m(m) + 1}$$

■(II)②ج

ننطلق من كون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

$$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}\right) \equiv arg\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}\right)[\pi]$$

و لدينا : $\left(\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}\right) = \frac{-i\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} - m\right)} = -i$

إذن : $\frac{z_2 - z_\Omega}{z_1 - z_\Omega}$ عدد تخيلي صرف.

و منه : $\frac{z_2 - z_1}{z_2 - m}$ عدد تخيلي صرف كذلك.

$$\Leftrightarrow \Re e(m) + \Im m(m) = 1$$

$$\Leftrightarrow y = -x + 1$$

إذن مجموعة النقط M التي من أجلها Ω و M و M_1 و M_2 متداورة

تُشَكِّلُ المستقيم (Δ) الذي معادلته : $(\Delta) : y = -x + 1$

<u>التمرين الثالث : (3,3 ن)</u>

■①أ

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

$= (2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n)$

لدينا : $2 \equiv 0[2]$ و $3 \equiv 1[2]$

إذن : $2^n \equiv 0[2]$ و $3^n \equiv 1[2]$

و منه : $\boxed{\begin{cases}2^n - 1 \equiv 1[2]\\ 2^n + 1 \equiv 1[2]\end{cases}}\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$ و $\boxed{3^n \equiv 1[2]}$ (3)

من (3) و (2) نحصل على : $\boxed{3^n(1 + 2^n) \equiv 1[2]}$ (4)

و من (1) و (4) نحصل على : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 2[2]$

يعني : $(2^n - 1) + 3^n(1 + 2^n) \equiv 0[2]$ لأن : $2 \equiv 0[2]$

و منه : $\boxed{a_n \equiv 0[2]}$

و بالتالي : a_n عدد زوجي كيفما كان العدد الصحيح الطبيعي n .

■①ب

لدينا : $a_n = 2^n + 3^n + 3^n 2^n - 1$

يعني : $a_n = 2^n(3^n + 1) + (3^n - 1)$

نعلم أن : $3 \equiv 0[3]$ إذن : $3^n \equiv 0[3]$

و منه : $\boxed{(3^n - 1) \equiv -1[3]}$ (5) و $\boxed{(3^n + 1) \equiv 1[3]}$ (6)

من (5) و (6) نحصل على : $2^n(3^n + 1) + (3^n - 1) \equiv 2^n - 1[3]$

يعني : $\boxed{a_n \equiv (2^n - 1)[3]}$ (7)

و لدينا في الأخير : $2 \equiv -1[3]$ إذن : $2^n \equiv (-1)^n[3]$

أي : $\boxed{(2^n - 1) \equiv ((-1)^n - 1)[3]}$ (8)

من المتوافقتين (7) و (8) نستنتج أن : $a_n \equiv (-1)^n - 1[3]$

من أجل n عدد زوجي نحصل على : $(-1)^{2k} - 1 = 0$

أي : $\boxed{a_n \equiv 0[3]}$

من أجل : n عدد فردي نحصل على : $(-1)^{2k+1} - 1 = -2$

و منه : $\boxed{a_n \equiv -2[3]}$

■(II)②أ

بتطبيق مبرهنة $(Fermat)$ مرتين نحصل على :

$\begin{cases}p \text{ أولي}\\ p \wedge 2 = 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{2^{p-1} \equiv 1[p]}$ (1)

و

$\begin{cases}p \text{ أولي}\\ p \wedge 3 = 1\end{cases} \Rightarrow \boxed{3^{p-1} \equiv 1[p]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$3^{p-1} \cdot 2^{p-1} \equiv 1[p]$$

يعني : $\boxed{6^{p-1} \equiv 1[p]}$

■ (II) 2 ب

لدينا : $2^{p-1} \equiv 1[p]$ إذن : $\boxed{3 \cdot 2^{p-1} \equiv 3[p]}$ (1)

و لدينا : $3^{p-1} \equiv 1[p]$ إذن : $\boxed{2 \cdot 3^{p-1} \equiv 2[p]}$ (2)

و لدينا : $6^{p-1} \equiv 1[p]$ إذن : $\boxed{6 \cdot 6^{p-2} \equiv 1[p]}$ (3)

و لدينا : $\boxed{-6 \equiv -6[p]}$ (4)

نجمع المتوافقات (1) و (2) و (3) و (4) طرفا بطرف نحصل على :

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad 6 \cdot 2^{p-2} + 6 \cdot 3^{p-2} + 6 \cdot 6^{p-2} - 6 \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(2^{p-1} + 3^{p-1} + 6^{p-2} - 1) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad 6(a_{p-2}) \equiv 0[p]$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{p \,/\, 6(a_{p-2})} \ (5)$$

نُفَكك العدد 6 إلى جداء عوامل أولية نجد : $6 = 2^1 \times 3^1$

و لدينا p عدد أولي أكبر من 3 إذن : $\boxed{6 \wedge p = 1}$ (6)

من (5) و (6) نستنتج حسب $(Gauss)$: $\boxed{p \,/\, a_{p-2}}$

■ (II) 2 ج

ليكن q عددا أوليا .

نفصل في هذا السؤال بين ثلاث حالات للعدد q :

الحالة الأولى : إذا كان $q = 2$

فإنه حسب نتيجة السؤال 1 أ : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ 2 \,/\, a_n$

إذن : $\boxed{(\exists n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ a_n \wedge q = q}$

الحالة الثانية : إذا كان $q = 3$

فإنه حسب نتيجة السؤال 1 ب : $\boxed{(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ 3 \,/\, a_n}$

إذن : $\boxed{(\exists n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ a_n \wedge q = q}$

الحالة الثالثة : إذا كان $q > 3$

رأينا في السؤال 2 ب أن : $(\forall q > 3) \ ; \ q \,/\, a_{q-2}$

إذن : $\boxed{(\exists n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ a_n \wedge q = q}$

خلاصة : نستنتج من هذه الحالات الثلاث أن :

$$\boxed{(\forall q \epsilon \mathbb{P}) \, , (\exists n \epsilon \mathbb{N}^*) \ : \ a_n \wedge q = q}$$

التمرين الرابع : (3,3 ن)

الجزء الأول

■ 1 أ

نضع : $x = t^n$ إذن : $\ln x = n \ln t$

و منه : $t = e^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)}$

لدينا :
$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = \lim_{x\to0^+} x(1-\ln x)^n$$
$$= \lim_{t\to0^+} t^n(1-n\ln t)^n$$
$$= \lim_{t\to0^+} \Big(\underbrace{t}_{\to 0} - \underbrace{nt\ln t}_{\to 0}\Big)^n = 0 = f_n(0)$$

إذن f_n دالة متصلة على يمين الصفر.

■ 1 ب

$$\lim_{x\to0^+} \left(\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0}\right) = \lim_{x\to0^+} (1-\ln x)^n = +\infty \notin \mathbb{R}$$

إذن f_n غير قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر.

■ 1 ج

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f_2(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (1-\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{f_1(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} (1-\ln x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim_{x\to+\infty} x(1-\ln x) = -\infty$$

■ 2 أ

لدينا : $f_1(x) = x(1-\ln x)$

إذن :
$$f_1'(x) = (x - x\ln x)'$$
$$= 1 - (\ln x + 1)$$
$$= -\ln x$$

و منه : f_1' تنعدم في العدد 1

إذا كان : $x > 1$ فإن : $f_1'(x) < 0$

إذا كان : $x < 1$ فإن : $f_1'(x) > 0$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة f_1 كما يلي :

x	0		1		e		$+\infty$
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
f_1	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

■ ② ب

$$f_2'(x) = \left(x(1-\ln x)^2\right)'$$
$$= (1-\ln x)^2 - \frac{2x}{x}(1-\ln x)$$
$$= (1-\ln x)^2 - 2(1-\ln x)$$
$$= (1-\ln x)(1-\ln x-2)$$
$$= (1-\ln x)(-1-\ln x)$$

نلاحظ أن : f_2' تنعدم في $\frac{1}{e}$ و e .

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$+$		$+$	0	$-$	
$-1-\ln x$		$+$	0	$-$		$-$	
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f_2	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

■ ③ أ

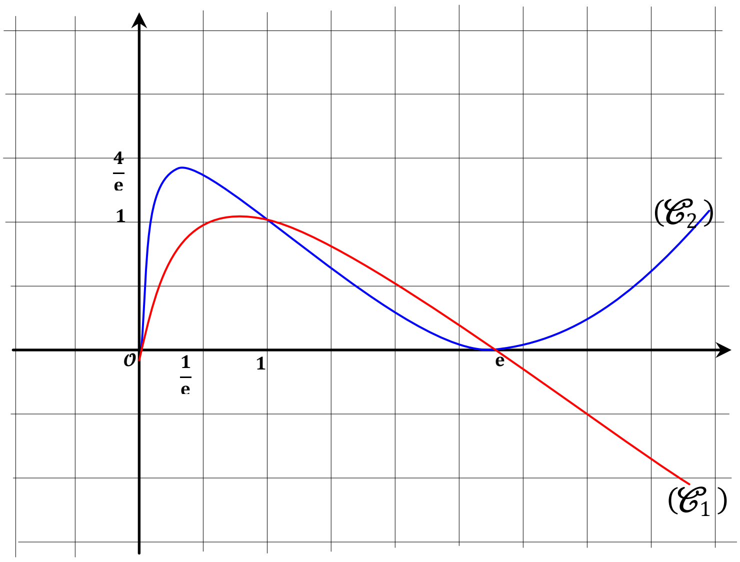
لدينا : $f_1(x) - f_2(x)$
$$= x(1-\ln x) - x(1-\ln x)^2$$
$$= x(1-\ln x)(\ln x)$$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-\ln x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$x(1-\ln x)\ln x$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن $(\mathscr{C}_1)$ يوجد فوق $(\mathscr{C}_2)$ على المجال $[1;e]$.

و $(\mathscr{C}_1)$ يوجد أسفل $(\mathscr{C}_2)$ على المجالين $[e;+\infty[$ و $]0;1]$.

■ ③ ب



الجزء الثاني

■ ① أ

لدينا الدالة $x \to \frac{f_1(x)}{1+x^2}$ متصلة على $]0,+\infty[$

إذن فهي تقبل دالة أصلية ψ بحيث :

$$\psi'(x) = \frac{f_1(x)}{(1+x^2)} \quad \text{و} \quad F(x) = \psi(1) - \psi(e^x)$$

إذن : F قابلة للإشتقاق على $]-\infty;0[$.

و لدينا : $F'(x) = \left(\psi(1)\right)' - \left(\psi(e^x)\right)'$
$$= 0 - e^x\psi'(e^x)$$
$$= \frac{-e^x f_1(e^x)}{1+e^{2x}}$$
$$= \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

■ ① ب

لدينا : $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} \; ; \; (\forall x < 0)$

و بما أن : $\boxed{(\forall x < 0) \; ; \; \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} > 0}$

فإن إشارة $F'(x)$ متعلقة فقط بإشارة $(x-1)$

و لدينا : $x < 0 \Rightarrow x < 1$

و منه : $x - 1 < 0$

و بالتالي : $F'(x) < 0$ يعني : F دالة تناقصية على المجال $]-\infty;0]$

الجزء الثالث

■ ① أ

ليكن $1 \leq x \leq e$ و $n \geq 1$

إذن : $0 \leq \ln x \leq 1$ و منه : $(1-\ln x) \geq 0$

أي : $x(1-\ln x)^n \geq 0$ و بالتالي : $\int_1^e f_n(x)dx \geq 0$

أي : $u_n \geq 0$

■ ① ب

لدينا : $f_{n+1}(x) - f_n(x)$

$$= x(1-\ln x)^{n+1} - x(1-\ln x)^n$$
$$= x(1-\ln x)^n(-\ln x)$$

و بما أن : $1 \leq x \leq e$ فإن : $(1-\ln x) \geq 0$ و $-\ln x \leq 0$

و منه : $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ أي : $\boxed{f_{n+1}(x) \leq f_n(x)}$

■ ① ج

بما أن : $\forall x \in [1,e]\ ;\ f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$

فإن : $\int_1^e f_{n+1}(x)\,dx \leq \int_1^e f_n(x)\,dx$

و منه : $u_{n+1} \leq u_n$

■ ① د

لدينا : $u_{n+1} \leq u_n$ إذن : $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية تناقصية .

و لدينا : $(\forall n \geq 1)\ ;\ u_n \geq 0$ إذن : $(u_n)_{n\geq 1}$ مصغورة بـ 0

و بالتالي : $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية متقاربة.

■ ② أ

لدينا : $u_{n+1} = \int_1^e f_{n+1}(x)\,dx = \int_1^e \underbrace{x}_{u'}\underbrace{(1-\ln x)^{n+1}}_{v}\,dx$

$$= \left[\frac{x^2}{2}(1-\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x^2\left(\frac{-1}{x}\right)(1-\ln x)^n\,dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}\int_1^e x(1-ln\,x)^n\,dx$$

$$= \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 1)\ ;\ u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2}u_n}$

■ ② أ

ليكن $t \in [e^x;1]$ بحيث : $x < 0$

يعني : $e^x < t < 1$

و منه : $1 + e^{2x} < 1 + t^2 < 2$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}f_1(t) < \frac{f_1(t)}{1+t^2} < \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt < \int_{e^x}^1\left(\frac{f_1(t)}{1+t^2}\right)dt < \int_{e^x}^1\left(\frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}\right)dt$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt} \quad (*)$$

■ ② ب

لدينا : $\left(x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)\right)' = 2x\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right) + x^2\left(\frac{-1}{2x}\right)$

$$= \frac{3x}{2} - x\ln x - \frac{x}{2}$$
$$= x(1-\ln x)^1$$
$$= f_1(x)$$

إذن الدالة $x \to x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)$ دالة أصلية للدالة f_1 على $]0;+\infty[$.

■ ② ج

لدينا : $\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt = \left[x^2\left(\frac{3}{4} - \frac{\ln x}{2}\right)\right]_{e^x}^1$

$$= \frac{3}{4} - e^{2x}\left(\frac{3}{4} - \frac{x}{2}\right)$$
$$= \frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2}$$

بما أن : $\lim_{x\to-\infty} e^{2x} = 0^+ = 0$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^{2x} = 0^- = 0$

فإن : $\lim_{x\to-\infty}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3}{4} - \frac{3e^{2x}}{4} + \frac{xe^{2x}}{2}\right) = \boxed{\frac{3}{4}}$

■ ③

نعود إلى التأطير $(*)$.

لدينا : $\frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt < F(x) < \frac{1}{(1+e^{2x})}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt\right) < \lim_{x\to-\infty} F(x) < \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{(1+e^{2x})}\int_{e^x}^1 f_1(t)\,dt\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{3}{8} < l < \frac{3}{4}}$$

■ 2 ب

الحيز $\mathcal{S}$ الذي طلب منا حساب مساحته مُعَرف بما يلي :

$$\mathcal{S} = \left|\int_1^e \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx\right|$$
$$= \left|\int_1^e f_2(x)dx - \int_1^e f_1(x)\, dx\right|$$
$$= |u_1 - u_2|$$

و لدينا : $\boxed{u_{n+1} = \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n}$

إذن : $u_0 = \int_1^e x\, dx = \boxed{\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}}$

$$u_1 = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}}$$

$$u_2 = \frac{-1}{2} + \frac{e^2}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}}$$

و بالتالي :

$$\mathcal{S} = |u_1 - u_2| = \left(\frac{e^2}{4} - \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{5}{4}\right) = \frac{1}{2}(unit\acute{e})^2$$

$unit\acute{e}$ هي وحدة المعلم و بما أن : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$

فإن : $unit\acute{e} = 2cm$

و منه : $(unit\acute{e})^2 = 4cm^2$

و بالتالي : $\mathcal{S} = \frac{1}{2}(unit\acute{e})^2 = \boxed{2\ cm^2}$

■ 3 أ

لدينا حسب ما سبق : $0 \le u_{n+1}$

إذن : $0 \le \frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n$

و منه : $\frac{1}{2} \le \frac{(n+1)}{2} u_n$

أي : $\boxed{\frac{1}{(n+1)} \le u_n}$ (1)

و لدينا كذلك : $u_{n+1} \le u_n$

إذن : $\frac{-1}{2} + \frac{(n+1)}{2} u_n \le u_n$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-1}{2} + \frac{nu_n}{2} + \frac{u_n}{2} \le u_n$$
$$\Leftrightarrow \quad u_n\left(\frac{n+1-2}{2}\right) \le \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad u_n\left(\frac{n-1}{2}\right) \le \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall n \ge 2) \quad u_n \le \frac{1}{n-1}} \quad (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن :

$$\boxed{(\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}} \quad (3)$$

■ 3 ب

لدينا حسب التأطير (3) :

$$(\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{1}{n+1} \le u_n \le \frac{1}{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad (\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{n}{n+1} \le nu_n \le \frac{n}{n-1}$$
$$\Leftrightarrow \quad \boxed{(\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \le nu_n \le \frac{1}{1-\frac{1}{n}}} \ (4)$$

لدينا : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{n-1}\right) = 0$

إذن حسب التأطير (3) نستنتج : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} u_n = 0}$

و لدينا : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{n}}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{n-\frac{1}{n}}\right) = 1$

إذن حسب التأطير (4) : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} nu_n = 1}$

■ 4 أ

ليكن $n \ge 1$

في البداية لدينا : $d_n = |v_n - u_n|$

$$= \left|\frac{-1}{2} + \frac{n}{2}v_{n-1} + \frac{1}{2} - \frac{n}{2}u_{n-1}\right|$$
$$= \frac{n}{2}|v_{n-1} + u_{n-1}|$$

إذن : $|v_n - u_n| = \frac{n}{2}|v_{n-1} - u_{n-1}|$

$$= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)|v_{n-2} - u_{n-2}|$$
$$= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)|v_{n-3} - u_{n-3}|$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$= \left(\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{2}\right)\cdots\left(\frac{2}{2}\right)|v_1 - u_1|$$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \ge 1)\ ;\ d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$

■ 4 ب

لنبرهن على أن : $(\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{n!}{2} \ge 3^{n-2}$

بالترجع لدينا من أجل $n = 2$: $\frac{2!}{2} \ge 3^0$

نفترض أن : $(\forall n \ge 2)\ ;\ \frac{n!}{2} \ge 3^{n-2}$

لدينا : $\frac{(n+1)!}{2} = (n+1)\frac{n!}{2} \ge (n+1)3^{n-2}$

بما أن : $n \ge 2$ فإن : $(n+1) \ge 3$

و منه : $(n+1)3^{n-2} \ge 3 \cdot 3^{n-2}$ يعني : $(n+1)3^{n-2} \ge 3^{n-1}$

إذن : $\dfrac{(n+1)!}{2} \geq 3^{(n+1)-2}$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}}$

■ 4 ج

ننطلق من العلاقة : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \dfrac{n!}{2} \geq 3^{n-2}$

$$\Leftrightarrow\quad n! \geq 3^{n-2} \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow\quad n! \geq \frac{3^{n-2} \cdot 2^{n-1}}{2^{n-2}}$$

$$\Leftrightarrow\quad \frac{n!}{2^{n-2}} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$$

$$\Leftrightarrow\quad \boxed{d_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2} d_1}$$

بما أن : $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}$ متتالية هندسية أساسها العدد الموجب $\frac{3}{2}$ و الأكبر من 1

فإن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-2} = +\infty$

و منه : $\boxed{\lim\limits_{n\infty} d_n = +\infty}$

■ 4 د

لدينا : $d_n = |v_n - u_n|$

نفترض أن $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية متقاربة .

و نعلم أن المتتالية $(u_n)_{n\geq2}$ متقاربة .

إذن : $(d_n)_{n\geq2}$ متقاربة

لكن حسب السؤال 4 ج : $\boxed{d_n \to +\infty}$

و بالتالي من هذا التناقض نستنتج أن المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ متباعدة.

■ و الحمد لله رب العالمين ■