



الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2010
الموضوع



الصفحة
1
4

9	المعامل:	NS24	الرياضيات	المادة:
4	مدة الإنجاز:	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		الشعب(ة) أو المسلك:

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5)
- التمرين الثاني يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5)
- التمرين الثالث يتعلق بالحسابيات.....(3)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.25)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(3,75)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط) الجزءان I و II مستقلان فيما بينهما.

I- نزود المجموعة $I =]0, +\infty[$ بقانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي:

$$(\forall (a, b) \in I \times I) \quad a * b = e^{\ln(a) \cdot \ln(b)}$$

1) بين أن القانون * تبادلي و تجميعي في I . 0.5

2) بين أن القانون * يقبل عنصرا محايدا ε في I يتم تحديده. 0.25

3) أ- بين أن $(I \setminus \{1\}, *)$ زمرة تبادلية. ($I \setminus \{1\}$ هي المجموعة I محرومة من 1) 0.75

ب- بين أن $]1, +\infty[$ زمرة جزئية للزمرة $(I \setminus \{1\}, *)$. 0.25

4) نزود I بقانون التركيب الداخلي \times (\times هو الضرب في \square)

أ- بين أن القانون * توزيعي بالنسبة للقانون \times 0.25

ب- بين أن $(I, \times, *)$ جسم تبادلي. 0.5

$$\text{II- نعتبر المصفوفة : } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

1) أحسب A^2 و A^3 . 0.5

2) استنتج أن المصفوفة A لا تقبل مقلوبا . 0.5

التمرين الثاني: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1) أ- حدد الجذرين المربعين للعدد العقدي $3 + 4i$: 0.25

ب- حل في المجموعة \square المعادلة : $4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$ (E) 0.5

2) ليكن a و b حلي المعادلة (E) حيث: $\text{Re}(a) < 0$ والنقطتين A و B صورتا a و b على التوالي.

$$\text{أ- تحقق أن: } \frac{b}{a} = 1 - i \quad 0.25$$

ب- استنتج أن المثلث AOB متساوي الساقين و قائم الزاوية في A . 0.75

3) لنكن C نقطة لحقها c وتخالف النقطة A ولنكن D صورة النقطة B بالدوران الذي مركزه C

وزاويته $\frac{\pi}{2}$ ولنكن L صورة النقطة D بالإزاحة التي متجهتها \overrightarrow{AO} .

أ- حدد بدلالة c العدد العقدي d لحق النقطة D . 0.5

ب- حدد بدلالة c العدد العقدي l لحق النقطة L . 0.5

ج- حدد الكتابة الجبرية للعدد العقدي $\frac{l-c}{a-c}$ ثم استنتج طبيعة المثلث ACL . 0.75

التمرين الثالث: (3 نقط)

- 1 (1) حدد الأعداد الصحيحة الطبيعية m بحيث: $m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{5}$
- (2) ليكن p عددا أوليا بحيث: $p = 3 + 4k$ مع k عدد صحيح طبيعي.
- و ليكن n عددا صحيحا طبيعيا بحيث: $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$
- أ- تحقق أن: $(n^2)^{1+2k} \equiv -1 \pmod{p}$ 0.25
- ب- بين أن n و p أوليان فيما بينهما. 0.5
- ج- استنتج أن: $(n^2)^{1+2k} \equiv 1 \pmod{p}$ 0.75
- د- استنتج مما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n يحقق: $n^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ 0.5

التمرين الرابع: (6.25 نقط)

- I- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي: $f(x) = 4xe^{-x^2}$
- و ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) أحسب نهاية الدالة f عند $+\infty$ 0.5
- (2) أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) حدد معادلة نصف المماس للمنحنى (C) في أصل المعلم ثم أنشئ (C) . 0.75
- (نأخذ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ و نقبل أن النقطة التي أفصولها $\sqrt{\frac{3}{2}}$ نقطة انعطاف للمنحنى (C))
- (4) أحسب التكامل $a = \int_0^1 f(x) dx$ ثم استنتج بالسنتمتر المربع مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى (C) ومحوري المعلم و المستقيم الذي معادلته $x = 1$ 0.5

II- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

- نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بما يلي: $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$
- (1) أ- بين أن: $e^{-x^2} < e^{-x}$ ($\forall x > 1$) 0.25
- ب- استنتج نهاية الدالة f_n عندما تؤول x إلى $+\infty$. 0.25
- (2) ادرس تغيرات الدالة f_n على المجال $[0; +\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها. 0.75
- (3) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد u_n من المجال $]0, 1[$ بحيث: $f_n(u_n) = 1$ 0.5
- (4) أ- تحقق أن: $f_{n+1}(u_n) = u_n$ ($\forall n \geq 2$) 0.25
- ب- بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 2}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

5) نضع : $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

أ- بين أن : $0 < \ell \leq 1$ 0.25

ب- بين أن : $(\forall n \geq 2) \quad -\frac{\ln(4)}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln(4)}{n}$ 0.25

ج- استنتج أن : $\ell = 1$ 0.5

التمرين الخامس: (3.75 نقط)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على \mathbb{R}^* بما يلي : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

1) بين أن الدالة F فردية . 0.25

2) لكل x من المجال $]0, +\infty[$ نضع : $\varphi(x) = \int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

أ- تحقق أن : $(\forall x > 0) \quad F(x) = \varphi(2x) - \varphi(x)$ 0.25

ب- بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ من أجل $x > 0$ 0.5

ج- استنتج منحي تغيرات الدالة F على المجال $]0, +\infty[$. 0.5

3) أ- باستعمال ميرهنة التزايدات المنتهية ، بين أن : $F(x) = \frac{x}{\ln(1+c^2)}$: $(\forall x > 0) (\exists c \in]x, 2x[)$ 0.5

ب- استنتج أن : $(\forall x > 0) \quad \frac{x}{\ln(1+4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1+x^2)}$ 0.25

ج- حدد النهايات : $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$. 0.75

د- تحقق أن : $F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2}$ و $F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1}$ 0.75

ثم استنتج أن المعادلة $F(x) = x$ تقبل حلا وحيدا في $]0, +\infty[$.