

لنبين أن \* قانون تبادلي في المجموعة I .

ليكن a و b عنصرين من I .

$$\begin{aligned} a * b &= e^{\ln(a).\ln(b)} & \text{لدينا :} \\ &= e^{\ln(b).\ln(a)} \\ &= b * a \end{aligned}$$

و منه :  $a * b = b * a$  يعني : \* قانون تبادلي في I .

لنبين أن \* قانون تجميعي في المجموعة I .

ليكن a و b و c ثلاث عناصر من I .

$$\begin{aligned} a * (b * c) &= e^{\ln(a).\ln(b*c)} \\ &= e^{\ln(a).\ln(e^{\ln(b).\ln(c)})} \\ &= e^{\ln(a).\ln(b).\ln(c)} \\ &= e^{\ln(e^{\ln(a).\ln(b)}).\ln(c)} \\ &= e^{\ln(a*b).\ln(c)} \\ &= (a * b) * c \end{aligned}$$

إذن القانون \* تجميعي في المجموعة I .

ليكن ε العنصر المحايد للقانون \* في المجموعة I

و هذا يعني :  $(\forall a \in I) ; a * \varepsilon = \varepsilon * a = a$

لتحديد قيمة ε ننتقل من إحدى المتساويتين  $a * \varepsilon = a$  أو  $\varepsilon * a = a$

الكتابة :  $a * \varepsilon = a$  .

$$e^{\ln(a).\ln(\varepsilon)} = a \quad \text{تعني :}$$

$$\ln(a).\ln(\varepsilon) = \ln(a) \quad \text{تعني :}$$

$$\ln(\varepsilon) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1 \quad \text{تعني :}$$

$$\varepsilon = e \quad \text{تعني :}$$

نتأكد من أن ينتمي إلى المجال  $]0; +\infty[$

بالفعل  $e \approx 2,72$  أكبر قطعاً من 0

إذن :  $e \in I$

و منه القانون يقبل عنصراً محايداً و هو العدد e

ليكن a و b عنصرين من المجموعة  $I \setminus \{1\}$  .

هذا يعني أن  $a \neq 1$  و  $b \neq 1$

و منه :  $\ln(a) \neq 0$  و  $\ln(b) \neq 0$

$$\ln(a).\ln(b) \neq 0 \quad \text{يعني :}$$

$$e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1 \quad \text{و منه :}$$

نستنتج أن :  $e^{\ln(a).\ln(b)} > 0$  و  $e^{\ln(a).\ln(b)} \neq 1$

و هذا يعني بكل بساطة أن :  $e^{\ln(a).\ln(b)} \in I \setminus \{1\}$

$$a * b \in I \setminus \{1\} \quad \text{أي :}$$

و منه \* قانون تركيب داخلي في المجموعة  $I \setminus \{1\}$

تبادلية و تجميعية القانون \* في المجموعة  $I \setminus \{1\}$

نستنتج من المجموعة I لأن  $I \setminus \{1\}$  جزء من I

بما أن القانون \* تبادلي و تجميعي في I فإن \* تبادلي و تجميعي

كذلك في المجموعة  $I \setminus \{1\}$  لأن  $I \setminus \{1\} \subset I$

لدينا e هو العنصر المحايد للقانون \* في المجموعة I

إذن e هو العنصر المحايد للقانون \* في المجموعة  $I \setminus \{1\}$

لأن  $e \neq 1$  أي  $e \in I \setminus \{1\}$

ليكن a عنصراً من المجموعة  $I \setminus \{1\}$

x مقلوب للعنصر a في المجموعة  $I \setminus \{1\}$

$$a * x = x * a = e \quad \text{يعني :}$$

$$a * x = e \quad \text{ننتقل من الكتابة}$$

هذا يعني أن  $e^{\ln(a).\ln(x)} = e$  و منه :  $\ln(a).\ln(x) = 1$

$$x = e^{\frac{1}{\ln(a)}} \quad \text{يعني :} \quad \ln(x) = \frac{1}{\ln(a)} \quad \text{أي :}$$

بما أن :  $a \in I \setminus \{1\}$  فإن  $a \neq 1$

و هذا يعني أن :  $\ln(a) \neq 0$

$$e^{\frac{1}{\ln(a)}} \neq 1 \quad \text{يعني :} \quad \frac{1}{\ln(a)} \neq 0 \quad \text{و منه :}$$

$$e^{\frac{1}{\ln(a)}} \in I \setminus \{1\} \quad \text{أي :}$$

نستنتج أن كل عنصر a من المجموعة  $I \setminus \{1\}$  يقبل

مقلوباً  $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$  من نفس المجموعة  $I \setminus \{1\}$

خلاصة : لقد تمكنا من أن نبرهن على أن \* قانون تركيب داخلي في

المجموعة  $I \setminus \{1\}$  و له عنصر محايد e و كل عنصر a يقبل

مقلوباً  $e^{\frac{1}{\ln(a)}}$  في المجموعة  $I \setminus \{1\}$

و بالتالي  $(I \setminus \{1\}, *)$  زمرة تبادلية.

أولاً ، نلاحظ أن  $]1; +\infty[ \subset I \setminus \{1\}$

لأن :  $I \setminus \{1\} = ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$

و كذلك :  $]1; +\infty[ \neq \emptyset$

و هذا يعني أن  $]1; +\infty[$  جزء غير منعدم من المجموعة  $I \setminus \{1\}$

يكفي الآن أن نبرهن على أنه إذا كان  $a$  و  $b$  عنصرين من  $[1, +\infty[$ ,

فإن :  $a * b' \in ]1, +\infty[$  بحيث  $b'$  هو مقلوب  $b$  في  $I \setminus \{1\}$

$$\begin{aligned} a * b' &= a * \left( e^{\frac{1}{\ln b}} \right) : \text{ننتقل من الكتابة} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln\left(e^{\frac{1}{\ln b}}\right)} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \frac{1}{\ln(b)}} \\ &= e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \end{aligned}$$

من جهة أخرى لدينا :  $a \in ]1, +\infty[$  و  $b \in ]1, +\infty[$

يعني  $a > 1$  و  $b > 1$

يعني  $\ln a > 0$  و  $\ln b > 0$  يعني :  $\frac{\ln(a)}{\ln(b)} > 0$

إذن :  $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} \in ]1, +\infty[$  ومنه  $e^{\frac{\ln(a)}{\ln(b)}} > 1$

يعني :  $a * b' \in ]1, +\infty[$

الوضعية التي نتوفر عليها الآن هي  $(I \setminus \{1\}, *)$  زمرة تبادلية .

$[1, +\infty[$  جزء غير منعدم من المجموعة  $I \setminus \{1\}$

$(\forall (a, b) \in ]1, +\infty[) ; a * b' \in ]1, +\infty[$

نستنتج من هذه الوضعية أن زمرة جزئية للزمرة  $(]1, +\infty[, *)$   $(I \setminus \{1\}, *)$ .

■ (4) (i)

ليكن  $a$  و  $b$  و  $c$  ثلاث عناصر من المجموعة  $I$ .

يكون  $*$  توزيعيا بالنسبة للقانون  $\times$  إذا كان :

$$\begin{cases} a * (b \times c) = (a * b) \times (a * c) \\ (a \times b) * c = (a * c) \times (b * c) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a * (b \times c) &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b \times c)} : \text{لدينا} \\ &= e^{\ln(a) \cdot (\ln(b) + \ln(c))} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b) + \ln(a) \cdot \ln(c)} \\ &= e^{\ln(a) \cdot \ln(b)} \times e^{\ln(a) \cdot \ln(c)} \\ &= (a * b) \times (a * c) \end{aligned}$$

و بما أن القانون  $*$  تبادلي نستنتج المتساوية الأخرى

و بالتالي : القانون  $*$  توزيعي بالنسبة للقانون  $\times$

■ (4) (b)

لدينا  $I$  جزء غير منعدم من  $\mathbb{R}^*$

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من  $I$

إذن :  $x > 0$  و  $y > 0$  . ومنه :  $\frac{x}{y} > 0$  أي :  $x \times y^{-1} > 0$  .

إذن :  $(x \times y^{-1}) \in I$

إذن  $(I, \times)$  زمرة جزئية من  $(\mathbb{R}^*, \times)$  .

و لدينا حسب السؤال (4) (i) :  $*$  توزيعي بالنسبة لـ  $\times$  .

و لدينا كذلك : حسب السؤال (3) (i)  $(I \setminus \{1\}, *)$  زمرة تبادلية .

و بالتالي  $(I, \times, *)$  جسم تبادلي .

■ (II) (1)

بعد الحساب سوف تحصل على النتائج التالية :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و } A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

■ (2)

نفترض أن  $A$  تقبل مقلوبا  $A^{-1}$  في المجموعة  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  .

إذن :  $A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$

بحيث :  $\times$  هو ضرب المصفوفات و  $I$  هي المصفوفة :  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ننتقل من الكتابة  $A \times A^{-1} = I$

نضرب طرفي هذه المتساوية في  $A^2$  نحصل على :  $A^3 \times A^{-1} = A^2$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \text{إذن}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ و هذا تناقض واضح لأن :}$$

و بالتالي المصفوفة  $A$  لا تقبل مقلوبا في  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

■ (1) (i)

ليكن العدد العقدي  $x + iy$  جذرا مربعا للعدد العقدي  $3 + 4i$

هذا يعني أن :  $(x + iy)^2 = 3 + 4i$

$$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + i(2xy) = 3 + 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

من المعادلة الثانية نحصل على :  $x^2 = \frac{4}{y^2}$

نعوض  $x^2$  في المعادلة الأولى نجد :  $\frac{4}{y^2} - y^2 = 3$

$$y^4 + 3y^2 - 4 = 0 : \text{يعني}$$

$$\begin{aligned} \frac{b-a}{0-a} &= -\frac{b}{a} + 1 \quad \text{لدينا :} \\ &= -(1-i) + 1 \\ &= i \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{b-a}{0-a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AB}{AO} = 1 \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} AB = AO \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث  $AOB$  متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة  $O$

$$B \xrightarrow{R_c\left(\frac{\pi}{2}\right)} D \quad \text{لدينا :}$$

$$(d-c) = e^{i\frac{\pi}{2}}(b-c) \quad \text{إذن حسب التعريف العقدي للدوران :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow d &= c + i(b-c) \\ \Leftrightarrow d &= c + ib - ic \\ \Leftrightarrow c(1-i) &= d - ib \\ \Leftrightarrow c(1-i) &= d - i\left(\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow c(1-i) &= d + \frac{3}{2} - \frac{i}{2} \\ \Leftrightarrow c &= \left(\frac{1}{1-i}\right)d + \left(\frac{\frac{3}{2}-i}{1-i}\right) \\ \Leftrightarrow c &= \frac{1}{2}(1+i)d + \left(1 + \frac{i}{2}\right) \end{aligned}$$

$$D \xrightarrow{T_{\overline{AO}}} L \quad \text{لدينا :}$$

$$\overline{DL} = \overline{AO} \quad \text{إذن حسب تعريف الإزاحة :}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\ell - d) &= (0 - a) \\ \Leftrightarrow \left(\ell + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i\right) &= -a \\ \Leftrightarrow \ell + (i-1)c + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i &= \frac{1}{2} - i \\ \Leftrightarrow \ell &= (1-i)c - \frac{i}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$\text{نضع : } t = y^2 \text{ نحصل على : } t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$\text{هذه المعادلة تقبل الحلين } t_1 = 1 \text{ و } t_2 = -4$$

$$\text{الحل } t_1 \text{ يمدنا بـ } y = 1 \text{ أو } y = -1$$

$$\text{والحل } t_2 \text{ يمدنا بـ } y = 2i \text{ أو } y = -2i$$

إذن المعادلة :  $y^4 + 3y^2 - 4 = 0$  تقبل أربعة حلول. نعوض كل قيمة لـ  $y$  في النظمة لإيجاد قيمة  $x$  الموافقة.

$$\text{إذا كان } y = 1 \text{ فإن : } x = 2$$

$$\text{إذا كان } y = -1 \text{ فإن : } x = -2$$

$$\text{إذا كان } y = 2 \text{ فإن : } x = -i$$

$$\text{إذا كان } y = -2 \text{ فإن : } x = i$$

بعد ذلك نكتب الجذور المربعة التي حصلنا عليها و هي :

$$\text{في الحالة الأولى : } x + iy = 2 + i$$

$$\text{في الحالة الثانية : } x + iy = -2 - i$$

$$\text{في الحالة الثالثة : } x + iy = -2 - i$$

$$\text{في الحالة الرابعة : } x + iy = 2 + i$$

و بالتالي :  $(3 + 4i)$  يقبل جذرين مربعين فقط و هما :  $(2 + i)$  و  $(-2 - i)$

$$\text{نحل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } (E) : 4z^2 - 10iz - 7 - i = 0$$

$$\text{بعد حساب المميز } \Delta \text{ نجد : } \Delta = 4(3 + 4i)$$

لدينا حسب السؤال ① (j) :  $(3 + 4i)$  يقبل جذرين مربعين فقط

$$\text{و هما : } (2 + i) \text{ و } (-2 - i)$$

$$\text{نختار } (2 + i) \text{ نحصل على : } \Delta = [2(2 + i)]^2$$

و منه  $(E)$  تقبل الحلين  $a$  و  $b$  كما يلي :

$$b = \frac{3}{2}i + \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad a = i - \frac{1}{2}$$

عندما نختار الجذر المربع الثاني لـ  $(3 + 4i)$  نحصل على نفس النتيجة.

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } a(1-i) &= \left(i - \frac{1}{2}\right)(1-i) \\ &= i + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i \\ &= b \end{aligned}$$

2 (ج)

ليكن  $p$  عددا أوليا و  $k$  و  $n$  عددين صحيحين طبيعيين

ننتقل إذن من الكتابة :  $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow n^2 &\equiv -1[p] \\ \Leftrightarrow (n^2)^{(عدد فردي)} &\equiv (-1)^{(عدد فردي)} [p] \\ \Leftrightarrow (n^2)^{(2k+1)} &\equiv -1[p] \end{aligned}$$

2 (ب)

لدينا حسب السؤال (أ)  $(n^2)^{(2k+1)} \equiv -1[p]$

$$\Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}) : (n^2)^{(2k+1)} + 1 = pu$$

$$\Leftrightarrow (\exists u \in \mathbb{Z}) : pu + n \underbrace{(-n^{4k})}_v = 1$$

$$\Leftrightarrow (\exists u, v \in \mathbb{Z}) : pu + nv = 1$$

و بالتالي حسب Bezout :  $n \wedge p = 1$

2 (ج)

لدينا  $p$  عدد أولي و  $n \wedge p = 1$

إذن حسب مبرهنة Fermat :  $n^{p-1} \equiv 1[p]$

و نعلم أن  $p = 4k + 3$  إذن :  $(n^2)^{2k+1} \equiv 1[p]$

2 (د)

باستعمال البرهان بالخلف نفترض وجود العدد  $n$  بحيث :  $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

$$\begin{cases} (n^2)^{2k+1} \equiv -1[p] \\ (n^2)^{2k+1} \equiv 1[p] \end{cases} \quad \text{إذن :}$$

و منه :  $1 \equiv -1[p]$  أي :  $p / 2$

بما أن  $p$  عدد أولي و يقسم العدد الأولي 2 فإن :  $p = 2$

و هذا مستحيل لأنه لا وجود لعدد صحيح طبيعي  $k$  يحقق  $4k + 3 = 2$

و بالتالي لا وجود لعدد صحيح طبيعي  $n$  يحقق :  $n^2 + 1 \equiv 0[p]$

3 (ج)

$$\frac{\ell - c}{a - c} = \frac{(1 - i)c - 1 - \frac{i}{2} - c}{i - \frac{1}{2} - c} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{-ic - 1 - \frac{i}{2}}{i - \frac{1}{2} - c} = \frac{i(-c + i - \frac{1}{2})}{i - \frac{1}{2} - c} = i$$

$$\frac{\ell - c}{a - c} = i = e^{\frac{i\pi}{2}} \quad \text{إذن :}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{CL}{CA} = 1 \\ \left( \overline{CA}, \overline{CL} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

و بالتالي المثلث  $ALC$  متساوي الساقين و قائم الزاوية في النقطة  $C$

**التمرين الثالث : (3,0 ن)**

1

في البداية وجب التذكير بخاصيتين هامتين :

الخاصية الأولى : في  $\mathbb{Z}$  ، إذا كان  $a$  يقسم  $b$  و  $c$  فإنه يقسم كل تاليفة خطية لهما :  $(ub + vc)$ .

بتعبير آخر :  $\{a / b, a / c\} \Rightarrow (\forall u, v \in \mathbb{Z}) : a / (ub + vc)$

الخاصية الثانية (un premier qui divise un produit)

كل عدد أولي يقسم جداء عددين فإنه بالضرورة يقسم أحدهما.

بتعبير آخر :  $\{p \in \mathbb{P} : p / ab\} \Rightarrow (p / a) \text{ أو } (p / b)$

ننتقل إذن من الكتابة :  $m^2 + 1 \equiv 0[5]$

$$\Leftrightarrow 5 / (m^2 + 1)$$

و نعلم أن  $5 / (-5)$

إذن حسب الخاصية الأولى :  $5 / (m^2 + 1 - 5)$

يعني :  $5 / (m - 2)(m + 2)$

بما أن 5 عدد أولي فإنه حسب الخاصية الثانية :

$$5 / (m - 2) \quad \text{أو} \quad 5 / (m + 2)$$

و منه حسب الخاصية الأولى :

$$5 / (m - 2) \quad \text{أو} \quad 5 / (m + 2 - 5)$$

يعني :  $m \equiv 2[5]$  أو  $m \equiv 3[5]$

في المجموعة  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$  نكتب  $m \in \{\bar{2}, \bar{3}\}$

1 ■

نعلم أن :  $\frac{e^x}{x} \xrightarrow{+\infty} +\infty$

لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4xe^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{x}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right)}$

نضع :

إذن النهاية تصبح :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{\sqrt{t}}\right) \times \frac{1}{\left(\frac{e^t}{t}\right)} = 0$

2 ■

لدينا :  $f'(x) = 4e^{-x^2} + (4x)(-2xe^{-x^2}) = (1 - 2x^2)(4e^{-x^2})$

بما أن :  $4e^{-x^2} > 0$  فإن إشارة  $f'(x)$  تتعلق فقط بإشارة  $1 - 2x^2$

إذا كان :  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  فإن  $f'(x) = 0$

إذا كان :  $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  فإن  $f'(x) < 0$

إذا كان :  $x < \frac{\sqrt{2}}{2}$  فإن  $f'(x) > 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

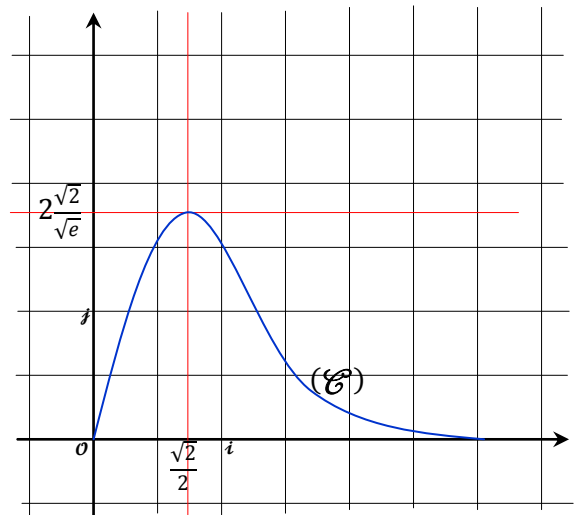
$x$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f$	0	$\nearrow 2\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e}}$	$\searrow 0$

3 ■

معادلة المماس لـ  $(\mathcal{C})$  في النقطة  $O$  هي :

$(\Delta) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني :  $(\Delta) : y = 4x$  مع  $x \geq 0$



4 ■

لاحظ أن :  $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$

يعني :  $-2(e^{-x^2})' = 4xe^{-x^2}$

إذن :  $\int_0^1 4xe^{-x^2} dx = -2[e^{-x^2}]_0^1 = -2(e^{-1} - 1) = 2(1 - e^{-1}) = a$

مساحة الحيز  $S$  تقاس باستعمال التكامل التالي :

$S = \int_0^1 f(x) dx$

بما أن :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$  فإن العدد  $2(1 - e^{-1})$  يعني في الواقع  $2unités(1unité - e^{-1}unité)$

في هذا التمرين لدينا :  $1unité = 2cm$  إذن  $a = 8(1 - e^{-1}) cm^2$

الجزء الثاني

1 1 ■

ليكن  $x$  عددا حقيقيا أكبر من أو يساوي 1

لدينا :  $x > 1 \Rightarrow x^2 > x \Rightarrow -x^2 < -x \Rightarrow e^{-x^2} < e^{-x}$

لأن الدالة  $x \rightarrow e^x$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}$

1 1 ■

لدينا :  $(\forall x > 1) : 0 < e^{-x^2} < e^{-x}$

إذن :  $(\forall x > 1) : 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

من جهة أخرى لدينا :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{\frac{-nx}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(xe^{\frac{-x}{n}}\right)^n = \lim_{u \rightarrow -\infty} (-nue^u)^n = 0$

بنفس الطريقة نبين أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x^2} = 0$

إذن :  $(\forall x > 1) : 0 < 4x^n e^{-x^2} < 4x^n e^{-x}$

ومنه :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

جميع النتائج المحصل عليها لحد الآن نخول لنا استعمال مبرهنة القيم الوسيطة

و بالتالي : يوجد عدد حقيقي وحيد  $u_n$  محصور بين 0 و 1

و يحقق :  $g_n(u_n) = 0$

أو بتعبير آخر : المعادلة  $f_n(x) = 1$  تقبل حلا وحيدا  $u_n$  من المجال  $]0,1[$

■ (4) (i)

لدينا :  $f_n(x) = 4x^n e^{-x^2}$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = 4x^{n+1} e^{-x^2}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = x(4x^n e^{-x^2})$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(x) = x f_n(x)$$

و منه :  $f_{n+1}(u_n) = u_n \cdot f_n(u_n)$

لدينا حسب السؤال (3)  $f_n(u_n) = 1$

إذن :  $f_{n+1}(u_n) = u_n \cdot 1 = u_n$

■ (4) (b)

لدينا  $f_n$  دالة متصلة و تزايدية قطعا على  $[0,1]$  .

و لدينا كذلك :  $u_n < 1$  لأن  $u_n \in ]0,1[$

إذن :  $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$

لأن :  $f_{n+1}(u_n) = u_n$  حسب السؤال (4) (i)

و :  $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$  حسب السؤال (3)

و بما أن  $f_{n+1}$  تقابل (متصلة و تزايدية قطعا على  $[0,1]$ )

فإن :  $u_n < u_{n+1}$

و منه  $(u_n)_n$  متتالية تزايدية . و بما أنها مكبورة

بالعدد 1 (  $u_n < 1$  ) فإنها متقاربة

■ (5) (i)

لدينا :  $0 < u_n < 1$  إذن :  $0 < \lim_{\infty}(u_n) \leq 1$

و منه :  $0 < \ell \leq 1$

المتتالية  $(u_n)_n$  مكبورة و تزايدية إذن يستحيل أن تكون نهايتها الصفر

و هذا ما يبرر الكتابة  $0 < \ell \leq 1$  . و هذه النهاية يمكن أن تساوي

1 الذي ليس قيمة من قيمها لأنها تزايدية . و في هذه الحالة نقول بأن

العدد 1 محد علوي للمجموعة  $\{u_n, n \geq 2\}$  .

■ (5) (b)

$$\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ 0 < (u_n)^2 < 1 \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

$$\Rightarrow 1 < e^{(u_n)^2} < e$$

نعلم أن :  $f(u_n) = 1$

يعني :  $4(u_n)^n e^{-(u_n)^2} = 1$

■ (2)

لدينا :  $f'_n(x) = 4e^{-x^2} x^{n-1} (n - 2x^2)$

بما أن  $4e^{-x^2} x^{n-1} > 0$  فإن إشارة  $f'_n(x)$  تتعلق فقط بإشارة  $n - 2x^2$

إذا كان :  $x = \sqrt{\frac{n}{2}}$  فإن  $f'_n(x) = 0$

إذا كان :  $x > \sqrt{\frac{n}{2}}$  فإن  $f'_n(x) < 0$

إذا كان :  $x < \sqrt{\frac{n}{2}}$  فإن  $f'_n(x) > 0$

و لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 4x^n e^{-x^2} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$

و نلخص النتائج في الجدول التالي :

$x$	0	$\sqrt{\frac{n}{2}}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		0	-
$f_n$	0	$f_n\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)$	0

■ (3)

لدينا حسب جدول تغيرات الدالة  $f_n$

$f_n$  دالة متصلة و تزايدية قطعا على المجال  $\left]0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right[$

لنبين أن  $\left]0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right[ \subset [0,1]$

ليكن  $x$  عنصرا من  $[0,1]$  إذن  $0 \leq x \leq 1$

و منه :  $0 \leq x^2 \leq 1$

نعلم أن :  $0 \leq 2 \leq n$

نضرب هاتين المتفاوتتين طرفا بطرف نحصل على :  $0 \leq 2x^2 \leq 1$

إذن :  $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$  و منه نستنتج أن :  $\left]0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right[ \subset [0,1]$

بما أن  $f_n$  متصلة و تزايدية قطعا على  $\left]0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right[$  و لدينا  $\left]0, \sqrt{\frac{n}{2}}\right[ \subset [0,1]$

إذن :  $f_n$  متصلة و تزايدية قطعا على  $[0,1]$

و بالتالي :  $f_n$  تقابل من  $[0,1]$  نحو صورته  $\left]0, \frac{4}{e}\right[$

نضع :  $g_n(x) = f_n(x) - 1$

لدينا :  $g_n(0) \cdot g_n(1) = (f_n(0) - 1)(f_n(1) - 1)$

$$= (0 - 1) \left(\frac{4}{e} - 1\right)$$

$$\approx -0,47 < 0$$

$$\begin{aligned} &= -\int_1^x \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \\ &= -\varphi(x) + \varphi(2x) \end{aligned}$$

ب 2 ■

لدينا :  $F(x) = -\varphi(x) + \varphi(2x)$

الدالة  $\varphi(x) \rightarrow x$  قابلة للإشتقاق .

لأن  $\frac{1}{\ln(1+x^2)}$  دالة متصلة إذن تقبل دالة أصلية و هي  $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\ln(1+x^2)} \quad \text{و لدينا :}$$

و لدينا كذلك :  $\varphi(2x) \rightarrow x$  دالة قابلة للإشتقاق لأنها مركب دالتين قابلتين للإشتقاق

و بالتالي  $F$  قابلة للإشتقاق لأنها مجموع دالتين قابلتين للإشتقاق.

إذن :  $F'(x) = -\varphi'(x) + 2\varphi'(2x)$

$$\begin{aligned} &= \frac{-1}{\ln(1+x^2)} + \frac{2}{\ln(1+4x^2)} \\ &= \frac{2\ln(1+x^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2)} \\ &= \frac{\ln[(1+x^2)^2] - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2)} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)}{\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2)} \end{aligned}$$

ج 2 ■

لدينا :  $x > 0$

إذن :  $1+x^2 > 1$  و  $1+4x^2 > 1$

و منه :  $\ln(1+4x^2) \cdot \ln(1+x^2) > 0$

و بالتالي إشارة  $F'(x)$  تتعلق فقط بإشارة :  $\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right)$

لنحل المعادلة :  $\ln\left(\frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2}\right) = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{x^4+2x^2+1}{1+4x^2} = 1 \\ \Leftrightarrow & x^4+2x^2+1 = 1+4x^2 \\ \Leftrightarrow & x^4-2x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & x^2(x^2-2) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \text{ أو } x = \sqrt{2} \text{ أو } x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

و منه :  $e^{(u_n)^2} = 4(u_n)^n$

ننتقل من :  $1 < e^{(u_n)^2} < e$

إذن :  $1 < 4(u_n)^n < e$

نعلم أن الدالة  $\ln$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}_+^*$  إذن :

$$0 < \ln(4(u_n)^n) < 1$$

$$\Leftrightarrow 0 < \ln(4) + n \ln(u_n) < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n}$$

د 5 ■

$$\frac{-\ln 4}{n} < \ln(u_n) < \frac{1}{n} - \frac{\ln 4}{n} \quad \text{بما أن :}$$

إذن بالضرورة :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(u_n) = 0$

و منه :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln(u_n)} = e^0 = 1$

و بالتالي :  $\ell = 1$

التمرين الخامس : (3,75 ن)

1 ■

لدينا :  $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt$

نضع :  $y = -t$  إذن  $dy = -dt$

إذا كان :  $t = -x$  فإن  $y = x$

إذا كان :  $t = -2x$  فإن  $y = 2x$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_x^{2x} \frac{-1}{\ln(1+y^2)} dy \\ &= -\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+y^2)} dy \\ &= -F(x) \end{aligned}$$

إذن :  $F$  دالة فردية .

د 2 ■

ليكن :  $x > 0$

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \quad \text{لدينا :} \\ &= \int_x^1 \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt + \int_1^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)} dt \end{aligned}$$

نحن بصدد دراسة تغيرات الدالة  $F$  على المجال  $]0, +\infty[$

إذن سوف نهتم بالحالة  $x = \sqrt{2}$  فقط.

إذا كان  $x = \sqrt{2}$  فإن  $x^2(x^2 - 2) > 0$

$$\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{1 + 4x^2} > 1 \quad \text{ومنه :}$$

$$\ln\left(\frac{x^4 + 2x^2 + 1}{1 + 4x^2}\right) > 0 \quad \text{يعني :}$$

$$F'(x) > 0 \quad \text{إذن :}$$

يعني  $F$  تزايدية قطعاً على  $[\sqrt{2}, +\infty[$  :

في الحالة الأخرى نجد أن  $F$  تناقصية على المجال  $]0, \sqrt{2}[$  .

■ (3) (أ)

ليكن  $x > 0$  إذن  $2x > 0$

ومنه :  $[x, 2x] \subset ]0, +\infty[$

و بما أن  $\varphi$  قابلة للإشتقاق على  $]0, +\infty[$  .

فإن  $\varphi$  متصلة وقابلة للإشتقاق على  $]x, 2x[$

ومنه حسب مبرهنة التزايديات المنتهية :

$$(\exists c \in ]x, 2x[) : \frac{\varphi(2x) - \varphi(x)}{2x - x} = \varphi'(c)$$

$$(\exists c \in ]x, 2x[) : \varphi(2x) - \varphi(x) = x\varphi'(c) \quad \text{يعني :}$$

$$F(x) = \frac{x}{\ln(1 + c^2)} \quad \text{يعني :}$$

■ (3) (ب)

لدينا حسب السؤال (أ)  $0 < x < c < 2x$

$$\Rightarrow 0 < x^2 < c^2 < 4x^2$$

$$\Rightarrow 0 < \ln(1 + x^2) < \ln(1 + c^2) < \ln(1 + 4x^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\ln(1 + 4x^2)} < \frac{1}{\ln(1 + c^2)} < \frac{1}{\ln(1 + x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1 + 4x^2)} < \frac{x}{\ln(1 + c^2)} < \frac{x}{\ln(1 + x^2)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\ln(1 + 4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1 + x^2)}$$

■ (3) (ج)

لدينا حسب السؤال (ب)

$$\frac{x}{\ln(1 + 4x^2)} < F(x) < \frac{x}{\ln(1 + x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1 + x^2)} = +\infty \quad \text{و لدينا :}$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \right) \quad \text{يكفي أن نستعمل :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln(1 + 4x^2)} = +\infty \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty \right) \quad \text{إذن :}$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty \right) \quad \text{و بنفس الطريقة وباستعمال النهاية :}$$

$$\left( \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x} = 0 \right) \quad \text{و} \quad \left( \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = +\infty \right) \quad \text{نجد :}$$

■ (3) (د)

$$F(x) < \frac{x}{\ln(1 + x^2)} \quad \text{لدينا حسب السؤال (ب)}$$

$$\sqrt{e-1} \approx 1,31 > 0 \quad \text{و لدينا :}$$

$$F(\sqrt{e-1}) < \frac{\sqrt{e-1}}{\ln(1 + (e-1))} \quad \text{إذن :}$$

$$(1) \quad F(\sqrt{e-1}) < \sqrt{e-1} \quad \text{يعني :}$$

$$\frac{\sqrt{e-1}}{2} \approx 0,65 > 0 \quad \text{و} \quad \frac{x}{\ln(1 + 4x^2)} < F(x) \quad \text{و لدينا كذلك :}$$

$$F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\frac{\sqrt{e-1}}{2}}{\ln\left(1 + \frac{4(e-1)}{4}\right)} \quad \text{إذن :}$$

$$(2) \quad F\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) > \frac{\sqrt{e-1}}{2} \quad \text{يعني :}$$

$$G(x) = F(x) - x \quad \text{نضع :}$$

$$(3) \quad G\left(\frac{\sqrt{e-1}}{2}\right) \cdot G(\sqrt{e-1}) < 0 \quad \text{من (1) و (2) نستنتج :}$$

لدينا  $F$  دالة متصلة و تناقصية قطعاً على  $]0, \sqrt{2}[$

$$(4) \quad ]0, \sqrt{2}[ \quad \text{إذن } G \text{ دالة متصلة و تناقصية قطعاً على}$$

$$\text{لأن : } G'(x) = F'(x) - 1 < 0$$

من (3) و (4) نستنتج حسب مبرهنة القيم الوسيطة وجود حل وحيد للمعادلة  $G(x) = 0$  أو المعادلة  $F(x) = x$  في المجال  $]0, \sqrt{2}[$  .