الإمتحان الوطني الموحد

لنيل شهادة البكالوريا

الدورة العادية 2011

مادة الرياضيات

مسلك العلوم الرياضية أ و ب

المعامل 9

مدة الإنجاز : أربع ساعات

استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول : (4,0 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) في الحلقة الواحدية $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفتين $\mathbb{A}$ و $\mathbb{I}$ المعرفتين بما يلي :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

نضع : $\mathbb{A}^0 = \mathbb{I}$ و $\mathbb{A}^1 = \mathbb{A}$ و $\mathbb{A}^2 = \mathbb{A}\times\mathbb{A}$ و $\forall n\in\mathbb{N}: \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}$

0,50 ن — (1) بين أن : $\forall k\in\mathbb{N} :\ \mathbb{A}^{2k} = \mathbb{I}$

0,50 ن — (2) بين أن المصفوفة $\mathbb{A}$ تقبل مقلوبا $\mathbb{A}^{-1}$ ينبغي تحديده.

ليكن α عددا حقيقيا موجبا قطعا .

لكل x و y من المجال $I =]\alpha,+\infty[$ نضع : $x * y = (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0,50 ن — (1) (أ) بين أن : $*$ قانون تركيب داخلي في I

0,50 ن — (ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي

0,50 ن — (ج) بين أن المجموعة $(I,*)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده

0,50 ن — (2) بين أن المجموعة $(I,*)$ زمرة تبادلية

(3) نعتبر التطبيق :

$$\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$$
$$x \longrightarrow \frac{1}{x-\alpha}$$

0,50 ن — (أ) بين أن التطبيق φ تشاكل تقابلي من $(I,*)$ إلى $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

0,50 ن — (ب) حل في المجموعة I المعادلة : $x^{(3)} = \alpha^3+\alpha$ بحيث : $x^{(3)} = x*x*x$

التمرين الثاني : (2,5 ن)

ليكن N العدد الصحيح الطبيعي الممثل في نظمة العد العشري بما يلي : $N = \underbrace{111\ldots11}_{\text{2010 مرة 1}}$

0,25 ن — (1) بين أن N يقبل القسمة على العدد 11

0,75 ن — (2) (أ) تحقق أن العدد 2011 أولي , و أن : $10^{2010}-1 = 9N$

0,50 ن — (ب) بين أن العدد 2011 يقسم العدد $9N$

0,50 ن — (ج) استنتج أن العدد 2011 يقسم العدد N .

0,50 ن — (3) بين أن العدد N يقبل القسمة على العدد 22121 .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

الجزءان الأول و الثاني مستقلان

(I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم . نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة ذات المجهول z :

$$(E_m) : \; z^2 + [(1-i)m-4]z - im^2 - 2(1-i)m + 4 = 0$$

① تحقق أن العدد $z_1 = 2 - m$ حل للمعادلة (E_m) . — 0,50 ن

② ليكن z_2 الحل الثاني للمعادلة (E_m) .

أ) بين أن $\quad z_1 z_2 = 1 \;\Leftrightarrow\; im^2 + 2(1-i) - 3 = 0$ — 0,50 ن

ب) حدد قيمتي m بحيث $\quad z_1 z_2 = 1$ — 1,00 ن

(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(\mathcal{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر التطبيق $\mathcal{S}$ الذي يربط النقطة M التي لحقها z بالنقطة M' التي لحقها z' بحيث : $z' = -(z-1)+1$

و الدوران $\mathcal{R}$ الذي مركزه النقطة Ω ذات اللحق $(1+i)$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$ و ليكن z'' لحق النقطة M'' صورة M بالدوران $\mathcal{R}$.

① أ) بين أن التطبيق $\mathcal{S}$ هو التماثل المركزي الذي مركزه النقطة ذات اللحق 1 — 0,25 ن

ب) بين أن : $z'' = iz + 2$. — 0,25 ن

② نفترض أن النقطة M تخالف O أصل المعلم و لتكن A النقطة التي لحقها 2

أ) أحسب $\dfrac{z''-2}{z'-2}$ ثم استنتج طبيعة المثلث $AM'M''$ — 0,50 ن

ب) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و Ω و M' و M'' متداورة. — 0,50 ن

التمرين الرابع : (6,5 ن)

(I) دراسة الحلول الموجبة للمعادلة $\quad (E) \;:\; e^x = x^n \quad$ بحيث $n \in \mathbb{N}^*$.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجموعة : $\mathcal{D} = [0,1[\cup]1,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln x} \; ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathscr{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(\mathcal{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

① تحقق أنه لكل x من المجموعة $]0,1[\cup]1,+\infty[$ لدينا : $\left(e^x = x^n \;\Leftrightarrow\; n = f(x)\right)$. — 0,25 ن

② بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على اليمين في 0. — 0,50 ن

③ أحسب النهايات التالية ثم أوّل هندسيا النتائج المحصل عليها : — 1,50 ن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^+} f(x) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to1^-} f(x)$$

④ أدرس تغيرات الدالة f على كل من المجالين $[0,1[$ و $]1,+\infty[$ ثم إعط جدول تغيراتها. — 0,75 ن

⑤ بين أن $(\mathscr{C})$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد زوج احداثيتيها. — 0,50 ن

⑥ أنشئ المنحنى $(\mathscr{C})$ — 0,50 ن

⑦ بين أنه إذا كان $n \geq 3$ فإن المعادلة (E) تقبل بالضبط حلين اثنين α_n و b_n بحيث $1 < \alpha_n < e < b_n$. — 0,50 ن

(II) دراسة تقارب المتتاليتين $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ و $(b_n)_{n\geq 3}$.

① بين أن $(\forall n \geq 3):\ b_n \geq n$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(b_n)_{n\geq 3}$ — 0,50 ن

② (أ) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$ تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة . — 0,50 ن

(ب) بين أن $(\forall n \geq 3):\ \frac{1}{n} < ln(\alpha_n) < \frac{e}{n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 3}$. — 0,50 ن

(ج) بين أن : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n)^n = e$ — 0,50 ن

التمرين الخامس: (3,5 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

① (أ) بين أن : $(\forall x \geq 0):\ 0 \leq F(x) \leq xe^{-x^2}$. — 0,50 ن

(ب) بين أن : $(\forall x \geq 1):\ e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ثم استنتج نهاية الدالة F عند $+\infty$. — 0,50 ن

② بين أن : F قابلة للإشتقاق على $[0,+\infty[$ و أن : $(\forall x \geq 0):\ F'(x) = e^{-2x^2} - 2xF(x)$. — 0,50 ن

③ نعتبر الدالة العددية G المعرفة على $[0,\frac{\pi}{2}]$ بما يلي :

$$\begin{cases} G(x) = F(\tan x) \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

(أ) بين أن الدالة G متصلة على اليسار في $\frac{\pi}{2}$. — 0,25 ن

(ب) بين أنه يوجد عدد حقيقي c ينتمي إلى المجال $]0,+\infty[$ بحيث : $F'(c) = 0$ و أن $F(c) = \frac{1}{2c}e^{-2c^2}$. — 0,75 ن

(يمكن تطبيق مبرهنة رول بالنسبة للدالة G على المجال $[0,\frac{\pi}{2}]$)

④ نعتبر الدالة العددية H المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $H(x) = F'(x)\frac{e^{x^2}}{2x}$

(أ) بين أن الدالة H تناقصية قطعا على المجال $]0;+\infty[$. — 0,50 ن

(ب) استنتج أن العدد c وحيد ثم إعط جدول تغيرات الدالة F . — 0,50 ن