



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

$$x * y = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

لكل  $x$  و  $y$  من المجال  $I = ]0,1[$  نضع :

**التمرين الأول : (3,5 ن)**

① (أ) بين أن  $(*)$  قانون تركيب داخلي في  $I$ . 0,50 ن

(ب) بين أن القانون  $(*)$  تبادلي و تجميعي. 0,50 ن

(ج) بين أن  $(I,*)$  يقبل عنصرا محايدا ينبغي تحديده. 0,50 ن

(2) بين أن  $(I,*)$  زمرة تبادلية. 0,50 ن

$$\mathbb{K} = \left\{ \frac{1}{2^n + 1} / n \in \mathbb{Z} \right\}$$

و

$$\mathbb{H} = \{ 2^n / n \in \mathbb{Z} \}$$

(3) نعتبر المجموعتين :

(أ) بين أن  $\mathbb{H}$  زمرة جزئية للزمرة  $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ . 0,50 ن

$$\begin{array}{ccc} \varphi : \mathbb{H} & \longrightarrow & I \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{x+1} \end{array}$$

(ب) نعتبر التطبيق  $\varphi$  المعرف بما يلي : 0,50 ن

بين أن التطبيق  $\varphi$  تشاكل من  $(\mathbb{H}, \times)$  إلى  $(I, *)$

(ج) استنتج أن  $(\mathbb{K},*)$  زمرة جزئية للزمرة  $(I,*)$ . 0,50 ن

**التمرين الثاني : (2,5 ن)**

ليكن  $x$  عددا صحيحا طبيعيا يحقق  $10^x \equiv 2[19]$ .



① (أ) تحقق أن :  $10^{x+1} \equiv 1[19]$  0,25 ن

(ب) بين أن :  $10^{18} \equiv 1[19]$  0,50 ن

(2) ليكن  $d$  القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و  $(x+1)$ .

(أ) بين أن :  $10^d \equiv 1[19]$  0,75 ن

(ب) بين أن :  $d \equiv 18$  0,50 ن

(ج) استنتج أن :  $x \equiv 17[18]$  0,50 ن

**التمرين الثالث : (4,0 ن)**

(I) نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة ذات المجهول  $z$  التالية :

$$(E) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = 0$$

① بين أن العدد  $-2i$  حل للمعادلة  $(E)$ . 0,50 ن

② حدد العددين العقديين  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث :

$$(\forall z \in \mathbb{C}) : z^3 - (1 + 2i)z^2 + 3(1 + i)z - 10(1 + i) = (z + 2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

③ (أ) حدد الجذرين المربعين للعدد  $(5 - 12i)$ . 0,50 ن

(ب) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$ . 0,50 ن



(II) المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر  $(\sigma, \vec{u}, \vec{v})$ .

نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها على التوالي هي :  $a = -1 + 3i$  و  $b = -2i$  و  $c = 2 + i$ .

① بين أن  $ABC$  قائم الزاوية ومتساوي الساقين في النقطة  $C$ . 0,50 ن

② نعتبر الدوران  $\mathcal{R}_1$  الذي مركزه B و زاويته  $\frac{\pi}{3}$  و الدوران  $\mathcal{R}_2$  الذي مركزه A و زاويته  $\frac{-2\pi}{3}$ .

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و صورتها بالدوران  $\mathcal{R}_1$  و  $\mathcal{R}_2$  صورتهما بالدوران  $\mathcal{R}_2$  و  $\mathcal{R}_1$  صورتهما بالدوران  $\mathcal{R}_1$  و  $\mathcal{R}_2$  صورتهما بالدوران  $\mathcal{R}_2$ .

① تحقق أن الصيغة العقدية للدوران  $\mathcal{R}_1$  هي :  $z_1 = \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)z - \sqrt{3} - i$  0,50 ن

② حدد  $z_2$  لحق  $M_2$  بدلالة z. 0,50 ن

③ استنتج أن النقطة I منتصف القطعة  $[M_1M_2]$  نقطة ثابتة. 0,50 ن

**التمرين الرابع : (6,0 ن)** لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  بما يلي :  $f(x) = x + \ln x$

و ليكن  $(\mathcal{C})$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$  ( $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\text{cm}$ )

① أحسب النهايات التالية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  1,00 ن

② اضع جدول تغيرات الدالة  $f$ . 0,50 ن

③ بين أن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $]0, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يتم تحديده ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي  $f^{-1}$ . 0,75 ن

④ أحسب :  $f(1)$  و  $f(e)$  ثم أنشئ  $(\mathcal{C})$  و  $(\mathcal{C})^{-1}$  منحنى الدالة  $f^{-1}$  في نفس المعلم  $(\sigma, \vec{i}, \vec{j})$ . 0,50 ن



④ ا أحسب التكامل :  $\int_1^{e+1} f^{-1}(x) dx$  (يمكن أن تضع  $t = f^{-1}(x)$ ) 0,50 ن

⑤ استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين  $(\mathcal{C})^{-1}$  و المستقيمت :  $x = 1$  و  $x = e + 1$  و  $y = x$ . 0,50 ن

⑤ نعتبر المعادلة :  $x + \ln x = n$  :  $(E_n)$ .

① بين أن المعادلة  $(E_n)$  تقبل حلا وحيدا  $x_n$ . 0,25 ن

② حدد قيمة  $x_1$  ثم بين أن :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$  0,50 ن

⑥ ا بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(x_n) \leq f(n)$  ثم استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : x_n \leq n$ . 0,50 ن

② بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; n - \ln n \leq x_n$ . 0,50 ن



③ أحسب النهايتين التاليتين :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n}{n - \ln n}\right)$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{x_n - n}{n}\right)$  0,50 ن

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و  $f_n$  الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بما يلي :

$$f_n(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n}$$

① بين أنه من أجل  $n \geq 2$  يوجد عدد حقيقي و حيد  $\alpha_n$  من المجال  $]0,1[$  بحيث :  $f_n(\alpha_n) = 0$  . ن 0,50

② بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة ( نضع :  $\ell = \lim_{+\infty}(\alpha_n)$  ) ن 0,75

③ (أ) تحقق أنه من أجل  $t \neq 1$  لدينا :  $1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$  ن 0,50

③ (ب) استنتج أن :  $\alpha_n + \frac{(\alpha_n)^2}{2} + \frac{(\alpha_n)^3}{3} + \dots + \frac{(\alpha_n)^n}{n} = -\ln(1 - \alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$  ن 0,50



④ (أ) بين أن :  $1 + \ln(1 - \alpha_n) = - \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt$  ن 0,50

④ (ب) بين أن :  $(\forall n \geq 2) : 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$  ن 0,50

④ (ج) استنتج أن :  $\ell = 1 - e^{-1}$  ن 0,50

