التمرين الأول : (3,5 ن)

■ 1 أ

ليكن x و y عنصرين من $]0,1[$

إذن : $0 < x < 1$ و $0 < y < 1$

إذن : $-1 < -x < 0$ و $-1 < -y < 0$

إذن : $0 < 1-x < 1$ و $0 < 1-y < 1$

و منه : $\boxed{0 < (1-x)(1-y) < 1}$ (1)

و بما أن $xy > 0$ فإن : $(1-x)(1-y) + xy > xy$

يعني : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} < 1}$ (2)

و لدينا : $xy > 0$ و $xy + (1-x)(1-y) > 0$

إذن : $\boxed{\dfrac{xy}{(1-x)(1-y)+xy} > 0}$ (3)

من (2) و (3) نستنتج أن :

$$(\forall (x,y)\epsilon I^2) \ ; \ 0 < \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y)\epsilon I^2) \ ; \ 0 < x * y < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall (x,y)\epsilon I^2) \ ; \ x * y \ \epsilon \ I$$

إذن $*$ قانون تركيب داخلي في I .

■ 1 ب

ليكن x و y عنصرين من I

لدينا :
$$x * y = \frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)} = \frac{yx}{yx+(1-y)(1-x)} = y * x$$

إذن $*$ قانون تبادلي في I .

لتكن x و y و z ثلاثة عناصر من I .

لدينا :
$$x*(y*z) = \frac{x(y*z)}{x(y*z)+(1-x)\big(1-(y*z)\big)} = \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)}$$

و بنفس الطريقة نحسب $(x*y)*z$ نحصل على :

$$(x*y)*z = \frac{xyz}{xyz+(1-x)(1-y)(1-z)} = x*(y*z)$$

و بالتالي : $*$ قانون تجميعي في I .

■ 1 ج

ليكن e العنصر المحايد للقانون $*$ في I .

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ x * e = e * x = x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ \frac{xe}{xe+(1-x)(1-e)} = x$$

نختزل بالعدد الغير المنعدم x نحصل على :

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ \frac{e}{xe+(1-x)(1-e)} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ xe + 1 - e - x + ex = e$$

$$\Leftrightarrow \quad (\forall x \epsilon I) \ ; \ e = \frac{1}{2} \ \epsilon \ ]0,1[$$

إذن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا في I و هو : $\frac{1}{2}$.

■ 2

حصلنا لحد الآن على ما يلي :

- $I =]0,1[$ مجموعة غير فارغة
- $*$ قانون تركيب داخلي في I .
- $*$ يقبل $\frac{1}{2}$ كعنصر محايد في I .
- $*$ تبادلي و تجميعي في I .

إذن لكي تكون $(I,*)$ زمرة تبادلية يكفي أن نبين أن :

كل عنصر x يقبل مماثلا بالقانون $*$ في المجموعة I .

ليكن x' مماثل x في المجموعة I بالنسبة للقانون $*$

إذن : $x * x' = x' * x = \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{xx'}{xx'+(1-x)(1-x')} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x' = (1-x)$$

بما أن : $x \epsilon I$ فإن $1 > x > 0$

إذن : $1 > 1-x > 0$

و منه $(1-x)$ هو مماثل x بالنسبة لـ $*$ في I .

و بالتالي : $(I,*)$ زمرة تبادلية .

■ 3 أ

لدينا $H = \{2^n \ / \ n \epsilon \mathbb{Z}\}$

إذن : H جزء غير فارغ من $\mathbb{R}_+^*$

لأن : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}) \ ; \ 2^n \ \epsilon \ \mathbb{R}_+^*$

ليكن 2^n و 2^m عنصرين من H

لدينا : $2^n \times (2^m)^{-1} = 2^{n-m} \in H$

إذن : $(H,\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$.

■ 3 ب

ليكن x و y عنصرين من H .

لدينا : $\varphi(x) * \varphi(y) = \left(\frac{1}{1+x}\right) * \left(\frac{1}{1+y}\right)$

$$= \frac{\frac{1}{(1+x)(1+y)}}{\frac{1}{(1+x)(1+y)} + \left(1-\frac{1}{1+x}\right)\left(1-\frac{1}{1+y}\right)}$$

$$= \frac{1}{(1+x)(1+y)} \times \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy}$$

$$= \frac{1}{1+xy} = \varphi(xy)$$

إذن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

■ 3 ج

ليكن 2^n عنصرا من H .

$$\varphi(2^n) = \frac{1}{1+2^n} \in K$$

$$\Leftrightarrow \quad \varphi(H) = K$$

لدينا : φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$.

و نعلم أن التشاكل يحافظ على بنية الزمرة.

و لدينا كذلك $(H,\times)$ زمرة جزئية لـ $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ حسب السؤال 3 أ

إذن $(\varphi(H),\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$

و بالتالي : $(K,*)$ زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$.

<u>التمرين الثاني : (2,5 ن)</u>

■ 1 أ

لدينا : $10^x \equiv 2[19]$

نضرب طرفي هذه المتوافقة في العدد 10 نجد : $10^{x+1} \equiv 20[19]$

من جهة أخرى لدينا : $20 \equiv 1[19]$

إذن : $\boxed{10^{x+1} \equiv 1[19]}$

■ 1 ب

لدينا 19 عدد أولي.

إذن حسب مبرهنة $(Fermat)$:

$$(\forall\, a \wedge 19 = 1)\ ;\ a^{19-1} \equiv 1[19]$$

من أجل $a = 10$ لدينا $10 \wedge 19 = 1$ إذن : $10^{19-1} \equiv 1[19]$

أي : $\boxed{10^{18} \equiv 1[19]}$

■ 2 أ

نضع : $d = (x+1) \wedge 18$ إذن حسب $(Bezout)$:

$$\exists\,(u,v) \in \mathbb{Z}^2\ ;\ d = 18u + (x+1)v$$

لدينا : $10^{x+1} \equiv 1[19]$ إذن : $(10^{x+1})^v \equiv 1^v[19]$

يعني : $\boxed{10^{(x+1)v} \equiv 1[19]}$ (1)

و لدينا كذلك : $10^{18} \equiv 1[19]$ إذن : $10^{18u} \equiv 1^u[19]$

يعني : $\boxed{10^{18u} \equiv 1[19]}$ (2)

نضرب المتوافقتين (1) و (2) طرفا بطرف نحصل على :

$$10^{18u} \times 10^{v(x+1)} \equiv 1[19]$$

يعني : $10^{18u+v(x+1)} \equiv 1[19]$

و بالتالي : $\boxed{10^d \equiv 1[19]}$

■ 2 ب

لدينا : $d = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $\boxed{d \setminus 18}$

و منه : $d \in \{1,2,3,6,9,18\}$

و لدينا : $\begin{cases} 10 \equiv 10[19] \\ 10^2 \equiv 5[19] \\ 10^3 \equiv 12[19] \\ 10^6 \equiv 11[19] \\ 10^9 \equiv 18[19] \\ 10^{18} \equiv 1[19] \end{cases}$

و بالتالي : $\boxed{d = 18}$

■ 2 ج

لدينا : $18 = 18 \wedge (x+1)$

إذن : $18 \,/\, (x+1)$

و بما أن : $18 \,/\, (-18)$

فإن : $18/(x+1) - 18$

أي : $18 \,/\, (x-17)$

و منه : $x \equiv 17[18]$

التمرين الثالث : (4 ن)

الجزء الأول

■ ①

تعويض سهل يمنحك نصف نقطة مجانية.

■ ②

ننشر التعبير : $(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$ نحصل على :

$$(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta) = z^3+(\alpha+2i)z^2+(\beta+2i\alpha)z+2i\beta$$

و منه نستنتج حسب مبدأ مقابلة معاملات الحدود من نفس الدرجة أن :

$$\begin{cases} 2i\beta = -10(1+i) \\ \alpha+2i = -(1+2i) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -(1+4i) \\ \beta = 5i-5 \end{cases}$$

■ ③ أ

ليكن $(x+iy)$ جذرا مربعا للعدد العقدي $(5-12i)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 = 5-12i \\ |x+iy| = \sqrt{5^2+12^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y^2)+2ixy = 5-12i \\ x^2+y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-y^2) = 5 \\ xy = -6 \\ x^2+y^2 = 13 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 4 \\ xy = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 3 \text{ أو } x = -3 \\ y = -2 \text{ أو } y = 2 \end{cases}}$$

إذن الجذران المربعان للعدد العقدي $5-12i$ همـا : $(3-2i)$ و $(-3+2i)$

■ ③ ب

لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية :

$$(z+2i)(z^2-(1+4i)z-5+5i) = 0$$

يجب إذن حل المعادلة التالية أولا : $z^2-(1+4i)z-5+5i = 0$

لدينا : $\Delta = (1+4i)^2-4(-5+5i)$

$= 5-12i$

$= (3-2i)^2$

إذن : $z_1 = -1+3i$ و $z_2 = 2+i$

و بالتالي : المعادلة (E) تقبل ثلاث حلول مختلفة و هي :

$$-2i \text{ و } 2+i \text{ و } -1+3i$$

الجزء الثاني

■ ①

لدينا : $\dfrac{a-c}{b-c} = \dfrac{-1+3i-2-i}{-2i-2-i} = \dfrac{3-2i}{2+3i} = -i = e^{\frac{-i\pi}{2}}$

و منه : $\boxed{(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}) \equiv \dfrac{-\pi}{2}[2\pi]}$ (1)

و لدينا كذلك : $\left|\dfrac{a-c}{b-c}\right| = |-i| = 1$

إذن : $\boxed{\dfrac{CA}{CB} = 1}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن المثلث ABC مثلث قائم الزاوية و متساوي الساقين في C .

■ ② أ

نضع : $M(z)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$

لدينا : $\mathcal{R}_1(M) = M_1$

$$\Leftrightarrow (z_1-b) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z-b)$$

$$\Leftrightarrow (z_1+2i) = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+2i)$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

■ ② ب

لدينا : $\mathcal{R}_2(M) = M_2$

$$\Leftrightarrow (z_2-a) = e^{\frac{-2i\pi}{3}}(z-a)$$

$$\Leftrightarrow (z_2+1-3i) = \left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(z+1-3i)$$

$$\Leftrightarrow z_2 = -\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-(1-3i)\left(\frac{3+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

■ ② ج

لدينا I هي منتصف القطعة $[M_1M_2]$.

$$\Leftrightarrow aff(I) = \frac{z_1+z_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I) = -\sqrt{3}-i-\frac{(1-3i)(3+i\sqrt{3})}{2}$$

$$\Leftrightarrow aff(I) = constante\ complexe$$

إذن $aff(I)$ عدد عقدي ثابت.

أي : $\boxed{I \text{ نقطة ثابتة في المستوى.}}$

التمرين الرابع : (6 ن)

1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

2) أ)

ليكن x عنصرا من $]0,+\infty[$

لدينا f قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين

قابلتين للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا : $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

2) ب)

لدينا f دالة متصلة و تزايدية قطعا على $]0,+\infty[$

إذن f تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $\mathbb{R} =]-\infty,+\infty[$

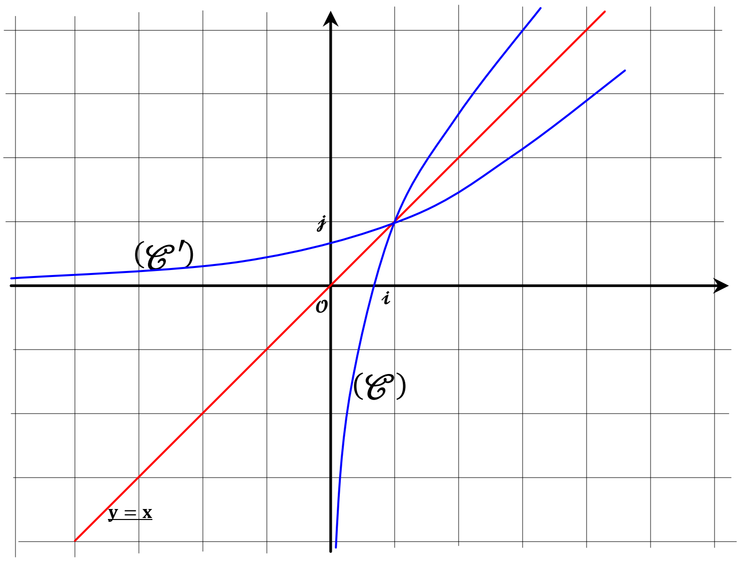
و تقابله العكسي f^{-1} دالة متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f^{-1}	$0 \nearrow +\infty$

3)

$f(1) = 1 + \ln 1 = 1$

$f(e) = \mathrm{e} + \ln \mathrm{e} = \mathrm{e} + 1 \approx 3{,}72$



4) أ)

لنحسب التكامل : $\displaystyle\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx$

من أجل ذلك نضع : $t = f^{-1}(x)$ إذن : $x = f(t)$

و منه : $\dfrac{dx}{dt} = f'(t)$

إذن :

$$\begin{aligned}
\int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx &= \int_1^{e} t f'(t)\,dt \\
&= [tf(t)]_1^e - \int_1^e f(t)\,dt \\
&= [tf(t)]_1^e - \left[\frac{t^2}{2} + t\ln t - t\right]_1^e \\
&= e^2 + e - 1 - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{e^2 + 2e - 3}{2} \approx 4{,}9
\end{aligned}$$

4) ب)

نضع A هي مساحة الحيز المذكور في السؤال إذن :

$$\begin{aligned}
& A = \int_1^{e+1} |x - f^{-1}(x)|\,dx \\
\Leftrightarrow\ & A = \int_1^{e+1} x\,dx - \int_1^{e+1} f^{-1}(x)\,dx \\
\Leftrightarrow\ & A = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{e+1} - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & A = \left(\frac{e^2 + 2e}{2}\right) - \left(\frac{e^2 + 2e - 3}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & A = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

■ 5 أ

نضع : $h(x) = x + \ln x - n$

لدينا h دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$

و لدينا كذلك : $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$

إذن h دالة تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$

و منه h تقابل من $]0,+\infty[$ نحو صورته $]-\infty,+\infty[$

و بما أن : $0 \in]-\infty,+\infty[$ فإنه يمتلك سابقا واحدا x_n بالتقابل h .

يعني : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ h(x_n) = 0$

بتعبير آخر : $\exists!\ x_n \in]0,+\infty[\ ;\ x_n + \ln(x_n) = n$

■ 5 ب

x_1 هو حل المعادلة : $x + \ln x = 1$

إذن : $x_1 = 1$

و لدينا : $f(x_n) = n$ إذن : $x_n = f^{-1}(n)$

و بما أن : f^{-1} دالة تزايدية قطعا فإن :

$$x_{n+1} = f^{-1}(n+1) > f^{-1}(n) = x_n \quad (1)$$

إذن من النتيجة $x_{n+1} > x_n$ نستنتج أن $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ متتالية تزايدية قطعا.}}$

نفترض أن المتتالية $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ مكبورة بعدد حقيقي A

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ x_n \le A$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ f(x_n) \le f(A) = B$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N})\ :\ n \le B$

$\Leftrightarrow$ المجموعة $\mathbb{N}$ مكبورة بالعدد B

$\Leftrightarrow$ مستحيل

إذن : $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ غير مكبورة}}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية متباعدة.

أي : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

■ 6 أ

ليكن $n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow\ n \ge 1$

$\Leftrightarrow\ \ln n \ge 0$

$\Leftrightarrow\ n + \ln n \ge n$

$\Leftrightarrow\ f(n) \ge f(x_n)$

إذن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ f(n) \ge f(x_n)$

و بما أن f^{-1} دالة تزايدية فإن : $f^{-1}(f(n)) \ge f^{-1}(f(x_n))$

و بالتالي : $\boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \ge x_n}$

■ 6 ب

لدينا : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n \ge x_n$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \frac{x_n}{n} \le 1$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln\left(\frac{x_n}{n}\right) \le 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \ln(x_n) - ln(n) \le 0$

$\Leftrightarrow\ (\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ \underbrace{x_n + \ln(x_n)}_{n} - ln(n) \le x_n$

$\Leftrightarrow\ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ ;\ n - ln(n) \le x_n}$

ملاحظة :

لدينا :

$$\lim_{n\infty}(n - \ln n) = \lim_{n\infty} n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right) = (+\infty)(1-0) = +\infty$$

إذن : $\underbrace{n - ln(n)}_{+\infty} \le x_n$

و هذا دليل آخر على أن : $\lim\limits_{n\infty} x_n = +\infty$

■ 6 ج

لدينا : $n - \ln n \le x_n$

إذن : $\frac{n - x_n}{n} \le \frac{\ln n}{n}$

و منه : $\left|\frac{n - x_n}{n}\right| \le \frac{\ln n}{n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{ln\, n}{n}\right) = 0$

فإن : $\lim\limits_{n\infty}\left|\frac{n - x_n}{n}\right| = 0$

أي : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n - n}{n}\right) = 0$

و لدينا حسب السؤالين أ و ب : $n - \ln n \le x_n \le n$

إذن : $\frac{n - \ln n}{n - ln\, n} \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \frac{n}{n - ln\, n}$

يعني : $1 \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \frac{n}{n - ln\, n}$

و بما أن : $\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{n}{n - ln\, n}\right) = \lim\limits_{n\infty}\left(\frac{1}{1 - \frac{ln\, n}{n}}\right) = 1$

فإن : $\underbrace{1}_{\boxed{1}} \le \frac{x_n}{n - ln\, n} \le \underbrace{\frac{n}{n - ln\, n}}_{\boxed{1}}$

و بالتالي : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}\left(\frac{x_n}{n - ln\, n}\right) = 1}$

التمرين الخامس : (4 ن)

■ ①

لدينا f_n دالة متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,1[$.

و لدينا : $\forall x \in]0,1[\ ;\ f_n'(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} > 0$

إذن : f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$

و منه f_n تقابل من $]0,1[$ نحو $]f_n(0), f_n(1)[$

لدينا : $f_n(0) = -1 < 0$

و $f_n(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 0$

إذن : $0 \in]f_n(0), f_n(1)[$

و منه : 0 يمتلك سابقا واحدا α_n بالتقابل f_n

يعني : $\exists!\ \alpha_n \in]0,1[\ ;\ \ f_n(\alpha_n) = 0$

■ ②

لدينا : $f_{n+1}(x) = -1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

و بما أن : $x \in]0,1[$ فإن : $\frac{x^{n+1}}{n+1} > 0$

و منه : $\forall x \in]0,1[\ ;\ f_{n+1}(x) > f_n(x)$

و لدينا كذلك : $\alpha_{n+1} \in]0,1[$ إذن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_n(\alpha_{n+1})$

و نعلم أن : $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = f_n(\alpha_n) = 0$

إذن : $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$

و بما أن f_n دالة تزايدية قطعا على $]0,1[$ فإن : $\boxed{\alpha_n > \alpha_{n+1}}$

إذن $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية تناقصية قطعا.

و لدينا : $(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 < \alpha_n < 1$

يعني أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ مصغورة بالعدد 0

و بالتالي : $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متتالية متقاربة .

■ ③ أ

لدينا $(t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها العدد الحقيقي t المخالف لـ 1 .

إذن : $1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1-t^n}{1-t} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$

■ ③ ب

لدينا من أجل : $t \neq 1$

$$1 + t + \cdots + t^{n-1} = \frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}$$

إذن :

$$\int_0^{\alpha_n} (1 + t + \cdots + t^{n-1})\, dt = \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{1}{1-t} - \frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

$$\Leftrightarrow\ \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

■ ④ أ

$$\alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$$

و نعلم أن : $f_n(\alpha_n) = 0$

يعني : $-1 + \alpha_n + \frac{\alpha_n^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha_n^n}{n} = 0$

إذن : $1 = -\ln(1-\alpha_n) - \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt$

و منه : $\boxed{1 + \ln(1-\alpha_n) = -\int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt}$

■ ④ ب

ننطلق من الكتابة : $0 \leq t \leq \alpha_n$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq 1 - \alpha_n \leq 1 - t$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{1}{1-\alpha_n} \geq \frac{1}{1-t} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \frac{t^n}{1-t} \leq \frac{t^n}{1-\alpha_n}$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \frac{1}{(1-\alpha_n)} \int_0^{\alpha_n} t^n\, dt$$

$$\Leftrightarrow\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right)$$

و بما أن : $\alpha_n^{n+1} < 1$

فإن : $\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{\alpha_n^{n+1}}{n+1}\right) \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)$

و بالتالي :

$$\boxed{(\forall n \geq 2)\ ;\ 0 \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

■ ④ ج

لدينا :
$$\underbrace{0}_{\xrightarrow{+\infty}\ \boxed{0}} \leq \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt \leq \underbrace{\left(\frac{1}{1-\alpha_n}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)}_{\xrightarrow{+\infty}\ \boxed{0}}$$

إذن :
$$\lim_{n\infty} \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{t^n}{1-t}\right) dt = 0$$

و منه :
$$\lim_{n\infty} (1 + \ln(1-\alpha_n)) = 0$$

نضع :
$$\ell = \lim_{n\infty} \alpha_n$$

إذن :
$$1 + \ln(1-\ell) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(1-\ell) = -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{1-\ell}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\ell} = e$$

$$\Leftrightarrow \quad e(1-\ell) = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad e - e\ell = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \ell = \frac{e-1}{e}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\ell = 1 - e^{-1}}$$

■ و الحمد لله رب العالمين ■