



استعمال الحاسبة الغير القابلة للبرمجة مسموح به

التمرين الأول: (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

(I) لكل a و b من المجال $I = [1; +\infty[$ نضع : $a \perp b = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - 1)^2$

① بين أن : \perp قانون تركيب داخلي في I .

0,50 ن

② بين أن القانون \perp تبادلي و تجميعي في I .

0,50 ن

③ بين أن : \perp يقبل عنصرا محايدا في I و يجب تحديده .

0,25 ن

(II) نذكر أن : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة. لتكن : $E = \left\{ M(x) = \begin{pmatrix} x & 2(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R}^* \right\}$

① بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$

0,50 ن

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^* &\rightarrow E \\ x &\rightarrow M(x) \end{aligned}$$

② نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي :

Ⓐ بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{R}^*, \times) نحو (E, \times) .

0,50 ن

Ⓑ استنتج بنية (E, \times) .

0,50 ن

Ⓒ بين أن المجموعة : $H = \left\{ \begin{pmatrix} 2^n & 2^{n+1} - 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / n \in \mathbb{Z} \right\}$ زمرة جزئية من (E, \times) .

0,75 ن

التمرين الثاني: (3,5 ن)

الجزءان (I) و (II) مستقلان .

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد منظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

(I) نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $(E) : z^2 - 4\left(1 + \frac{2}{3}i\right)z + \frac{5}{3} + 4i = 0$

① Ⓐ تحقق أن العدد $z_1 = 1 + \frac{2}{3}i$ حل للمعادلة (E) .

0,50 ن

Ⓑ بين أن الحل الثاني للمعادلة هو $z_2 = 3z_1$

0,50 ن

(II) نعتبر ثلاث نقط A و B و Ω مختلفة مثنى مثنى ألقاها على التوالي : a و b و ω .

ليكن r الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

نضع : $P = r(A)$ و $B = r(Q)$

ليكن العدد العقدي p لحق النقطة P و العدد العقدي q لحق النقطة Q .

① Ⓐ بين أن : $p = \omega + e^{\frac{i\pi}{3}}(a - \omega)$ و $q = \omega + e^{-\frac{i\pi}{3}}(b - \omega)$

0,50 ن

Ⓑ بين أن : $\frac{1 - e^{\frac{i\pi}{3}}}{1 - e^{-\frac{i\pi}{3}}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

0,25 ن





Ⓒ بين أن : $\frac{p-a}{q-b} = \left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) e^{\frac{4i\pi}{3}}$ ن 0,50

Ⓓ نفترض أن : $\left(\frac{\omega-a}{\omega-b}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Ⓐ بين أن : $APQB$ متوازي أضلاع. ن 0,75

Ⓑ بين أن : $\arg\left(\frac{b-a}{p-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ و استنتج أن الرباعي $APQB$ مستطيل. ن 0,75

التمرين الثالث : (3,0 ن)

Ⓐ ① تحقق أن : 503 عدد أولي. ن 0,25

Ⓑ بين أن $7^{502} \equiv 1 [503]$ ثم استنتج أن $7^{2008} \equiv 1 [503]$. ن 0,75

Ⓒ نعتبر في \mathbb{Z}^2 المعادلة : $(E) : 49x - 6y = 1$ ن 0,50

علما أن الزوج (1; 8) حل خاص للمعادلة (E) ، حل في \mathbb{Z}^2 المعادلة (E) مبرزا مراحل الحل.



Ⓓ نضع : $N = 1 + 7 + 7^2 + \dots + 7^{2007}$ ن 0,25

Ⓐ بين أن الزوج $(7^{2006}, N)$ حل للمعادلة (E). ن 0,25

Ⓑ استنتج أن N يقبل القسمة على 2012. ن 0,25

Ⓒ بين أن $N \equiv 0 [4]$ و $N \equiv 0 [503]$ ن 1,00

التمرين الرابع : (7,5 ن)

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $[0; +\infty[$ بما يلي : $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

Ⓐ أدرس تغيرات الدالة g على المجال $[0; +\infty[$ ن 0,50

Ⓑ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $[0; +\infty[$. ن 0,50

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي : $f(x) = e^x \ln(1 + e^{-x})$

Ⓐ بين أن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ن 1,00

Ⓑ بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = e^x g(e^{-x})$ ن 0,50

Ⓒ ضع جدول تغيرات الدالة f ن 0,50

Ⓓ أنشئ (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة f و (\mathcal{C}') الممثل للدالة $(-f)$ في نفس المعلم (O, \vec{i}, \vec{j}) ن 1,00

نقبل أن $-0,7$ قيمة مقربة لأفصول نقطة الإنعطاف الوحيدة للمنحنى (\mathcal{C}) .

Ⓔ بين أن لكل x من $] -1; 0[$ لدينا : $0 < f'(x) < g(e)$ ن 0,75

Ⓕ بين أن المعادلة $f(x) + x = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} . و أن : $-1 < \alpha < 0$ ن 0,75

$$\begin{cases} u_{n+1} = -f(u_n) ; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 0 \end{cases}$$

⑦ نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

Ⓐ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 \leq u_n \leq 0$ ن 0,50

Ⓑ بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq g(e)|u_n - \alpha|$ ن 0,50

Ⓒ استنتج أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_n - \alpha| \leq (g(e))^n$ ن 0,50

Ⓓ علما أن : $g(e) < 0,6$ أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ن 0,50

التمرين الخامس : (2,5 ن)

$$F(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \left(\frac{\ln t}{1+t^2} \right) dt$$

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0; +\infty[$ بما يلي :

① أحسب $F(1)$. ن 0,25



② Ⓐ بين أن الدالة F قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ و احسب $F'(x)$. ن 0,50

Ⓑ استنتج أن لكل x من المجال $]0; +\infty[$ لدينا : $F(x) = 0$ ن 0,50

③ باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل x من $]0; +\infty[$ لدينا : ن 0,50

$$F(x) = \left(\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \right) \ln x - \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$$

④ بين أن : $(\forall x > 0) : \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x)$ ن 0,25

⑤ استنتج أن : $(\forall x > 0) : \ln x = \frac{2}{\pi} \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$ ن 0,50

