



التمرين الأول : (3,5 ن)

- نذكر أن $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة واحدة تبادلية و كاملة .
- نزود \mathbb{Z} بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2$ **1** 0,50 ن
- بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي . **أ** **1** 0,25 ن
- بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ تقبل عنصرا محايدا يتم تحديده . **ب** **1** 0,50 ن
- بين أن : $(\mathbb{Z}, *)$ زمرة تبادلية . **ج** **1** 0,50 ن
- نزود \mathbb{Z} بقانون التركيب الداخلي τ المعرف بـ : $\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x \tau y = xy - 2x - 2y + 6$ **2**
- و نعتبر التطبيق f من \mathbb{Z} نحو \mathbb{Z} المعرف بما يلي : $(\forall x \in \mathbb{Z}) ; f(x) = x + 2$
- بين أن التطبيق f تشاكل تقابلي من (\mathbb{Z}, \times) نحو (\mathbb{Z}, τ) . **أ** **2** 0,50 ن
- بين أن : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) \tau z = (x \tau z) * (y \tau z)$ **ب** **2** 0,25 ن
- إستنتج من كل ما سبق أن : $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ حلقة تبادلية و واحدة . **3** 0,75 ن
- بين أن : $x \tau y = 2$ إذا وفقط إذا كان $x = 2$ أو $y = 2$. **أ** **4** 0,25 ن
- استنتج أن الحلقة $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ كاملة . **ب** **4** 0,25 ن
- هل $(\mathbb{Z}, *, \tau)$ جسم ؟ (علل الجواب) **ج** **4** 0,25 ن



التمرين الثاني : (3,5 ن)

- ليكن a عددا عقديا غير منعدم . **أ**
- نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z :

$$(E) : 2z^2 - (3 + i\sqrt{3})az + (1 + i\sqrt{3})a^2 = 0$$

- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $(-1 + i\sqrt{3})^2 a^2$ **1** **أ** 0,25 ن
- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) . **2** **أ** 0,50 ن
- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم (O, \vec{u}, \vec{v}) **ب**
- نعتبر النقط A و B و M التي ألقاها على التوالي : a و $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$ و z .
- ليكن r الدوران الذي مركزه M وزاويته $\frac{\pi}{3}$. نضع : $A_1 = r^{-1}(A)$ و $B_1 = r(B)$
- (حيث r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r)
- ليكن a_1 و b_1 لحقي A_1 و B_1 على التوالي .
- تحقق أن المثلث OAB متساوي الأضلاع . **1** **ب** 0,50 ن
- بين أن : $a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ و $b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z$ **أ** **2** **ب** 0,50 ن
- بين أن الرباعي OA_1MB_1 متوازي أضلاع . **ب** **2** **ب** 0,50 ن



$$\frac{z - b_1}{z - a_1} = - \left(\frac{z - b}{z - a} \right) \times \frac{a}{b} \quad \text{نفترض أن } M \neq A \text{ و } M \neq B \text{ بين أن : } \quad \boxed{\text{أ}} \quad \boxed{3} \quad \boxed{\text{II}} \quad \underline{0,50} \text{ ن}$$

بين أن النقط M و A_1 و B_1 مستقيمية إذا و فقط إذا كانت النقط M و O و A و B متداورة . $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{3} \quad \boxed{\text{II}} \quad \underline{0,75} \text{ ن}$

التمرين الثالث : (3 ن)

الهدف من التمرين هو البحث عن الأعداد الصحيحة الطبيعية n الأكبر قطعا من 1 $\square \square \square$
 و التي تحقق الخاصية (\mathcal{R}) التالية : $3^n - 2^n \equiv 0 [n] : (\mathcal{R})$. $\square \square \square$
 نفترض أن n يحقق الخاصية (\mathcal{R}) . و ليكن p أصغر قاسم أولي موجب للعدد n . $\square \quad \boxed{1} \quad \square$



بين أن : $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$ ثم استنتج أن $p \geq 5$. $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,75} \text{ ن}$

بين أن : $2^{p-1} \equiv 1 [p]$ و $3^{p-1} \equiv 1 [p]$. $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,50} \text{ ن}$

بين أنه يوجد زوج (a, b) من \mathbb{Z}^2 بحيث : $an - b(p-1) = 1$. $\boxed{\text{ج}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,50} \text{ ن}$

ليكن r و q باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد a على $(p-1)$. $\boxed{\text{د}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,50} \text{ ن}$

(يعني : $a = q(p-1) + r$ حيث : $0 \leq r < p-1$ و $q \in \mathbb{Z}$) $\square \square \square$

بين أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم k بحيث : $rn = 1 + k(p-1)$. $\square \square \square$

استنتج من كل ما سبق أنه لا يوجد عدد صحيح طبيعي n أكبر قطعا من 1 و يحقق الخاصية (\mathcal{R}) . $\square \quad \boxed{2} \quad \square$ $\underline{0,75} \text{ ن}$

التمرين الرابع : (10 ن)

$$\begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} ; (\forall x > 1) \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي : الجزء الأول

بين أن الدالة h متصلة على اليمين في 1 . $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,25} \text{ ن}$

بين أن : $\ln x < x - 1$; $(\forall x > 1)$ ثم استنتج أن h تناقصية قطعا على المجال $[1; +\infty[$. $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,75} \text{ ن}$

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة h . $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{2} \quad \square$ $\underline{0,50} \text{ ن}$

استنتج أن : $0 < h(x) \leq 1$; $(\forall x \geq 1)$. $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{2} \quad \square$ $\underline{0,25} \text{ ن}$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[1; +\infty[$ بما يلي : الجزء الثاني

و ليكن (\mathcal{C}) المنحنى الممثل للدالة g $\square \square \square$

في معلم متعامد ممنظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . $\square \square \square$

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; (\forall x > 1) \\ g(1) = \ln 2 \end{cases}$$

تحقق أن : $\int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt = \ln 2$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,25} \text{ ن}$

تحقق أن : $g(x) - \ln 2 = \int_x^{x^2} \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} dt$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{ب}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,25} \text{ ن}$



بين أن : $g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left(\frac{t-1}{t \ln t} \right) dt$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{ج}} \quad \boxed{1} \quad \square$ $\underline{0,50} \text{ ن}$

بين أن : $(x - \sqrt{x})h(x) \leq g(x) - \ln 2 \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$ $\boxed{\text{أ}} \quad \boxed{2} \quad \square$ $\underline{0,50} \text{ ن}$

0,50 ن

ب 2 استنتج أن الدالة g قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 .

0,75 ن

ج 2 بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ وأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

0,75 ن

أ 3 بين أن g قابلة للإشتقاق على المجال $]1; +\infty[$. وأن : $g'(x) = \frac{1}{2}h(\sqrt{x})$; $(\forall x > 1)$

0,50 ن

ب 3 استنتج أن : $0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \geq 1)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن

ج 3 أنشئ المنحنى (ع).

الجزء الثالث

0,50 ن

أ 1 بين أن الدالة : $k : x \mapsto g(x) - x + 1$ تقابل من $]1; +\infty[$ نحو $]-\infty; \ln 2]$.

0,25 ن

أ 2 استنتج أنه يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $]1; +\infty[$ بحيث : $1 + g(\alpha) = \alpha$.

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\{ u_{n+1} = 1 + g(u_n) ; (\forall n \geq 0) \}$
 $\{ 1 \leq u_0 < \alpha \}$

0,50 ن

أ 1 بين أن : $(\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$

0,50 ن

ب 1 بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً .

0,75 ن

ج 1 استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة . وأن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$

0,50 ن

أ 2 بين أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$

0,50 ن

ب 2 بين أن : $(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$

0,25 ن

ج 2 استنتج مرة ثانية أن : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$ 