

## التمرين الأول

### 1 أ

المجموعة  $\mathbb{Z}$  مزودة بالقانون \* المعرف بما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2$$

لدينا \* قانون تركيب داخلي لأنه إذا كان  $x$  و  $y$  عنصرين من  $\mathbb{Z}$

$$\text{فإن } (x + y - 2) \in \mathbb{Z}$$

نبرهن على أن \* تبادلي :

من أجل ذلك يكفي أن نلاحظ أن القانون + تبادلي في الحلقة

الواحدية التبادلية  $(\mathbb{Z}, +, \times)$

$$\text{إذن : } \forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; x * y = x + y - 2 = y + x - 2 = y * x$$

إذن \* تبادلي في  $\mathbb{Z}$ .

نبرهن على أن القانون \* تجميعي في  $\mathbb{Z}$ .

لتكن  $x$  و  $y$  و  $z$  ثلاثة عناصر من  $\mathbb{Z}$

$$\text{لدينا : } (x * y) * z = (x * y) + z - 2 = x + y - 2 + z - 2$$

$$= x + (y + z - 2) - 2$$

$$= x + (y * z) - 2$$

$$= x * (y * z)$$

$$\text{إذن : } \forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^2 ; (x * y) * z = x * (y * z)$$

ومن هنا فإن القانون \* تجميعي في المجموعة  $\mathbb{Z}$ .

### 1 ب



ليكن  $\varepsilon$  العنصر المحايد للقانون \* في المجموعة  $\mathbb{Z}$ .

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{Z}) ; x * \varepsilon = \varepsilon * x = x$$

لتحديد قيمة  $\varepsilon$  ننتقل من التعبير :  $x * \varepsilon = x$

$$\text{إذن : } x + \varepsilon - 2 = x \text{ و منه : } \varepsilon = 2 \in \mathbb{Z}$$

إذن 2 هو العنصر المحايد للقانون \* في  $\mathbb{Z}$ .

### 1 ج

لكي تكون  $(\mathbb{Z}, *)$  زمرة تبادلية يكفي أن نبرهن على أن كل عنصر من  $\mathbb{Z}$

يقبل ماثلا من  $\mathbb{Z}$  بالقانون \*.

ليكن  $x$  عنصرا من  $\mathbb{Z}$  و  $x'$  ماثله بالنسبة للقانون \*.

$$\text{إذن : } x * x' = x' * x = 2$$

ننتقل من المتساوية التالية :  $x * x' = 2$

$$\text{إذن : } x + x' - 2 = 2 \text{ يعني : } x' = 4 - x$$

بما أن  $x \in \mathbb{Z}$  و  $4 \in \mathbb{Z}$  فإن  $(4 - x) \in \mathbb{Z}$ .

وبالتالي : كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{Z}$  يقبل ماثلا في  $\mathbb{Z}$  و هو  $(4 - x)$ .

خلاصة : لقد حصلنا على المعلومات التالية :

• \* داخلي و تبادلي و تجميعي في  $\mathbb{Z}$ .

• \* يقبل عنصرا محايدا و هو 2.

• كل عنصر  $x$  من  $\mathbb{Z}$  يمتلك ماثلا و هو  $(4 - x)$ .

إذن :  $(\mathbb{Z}, *)$  زمرة تبادلية.

### 2 أ

نعتبر التطبيق  $f$  المعرف بما يلي :

$$f : (\mathbb{Z}, \times) \mapsto (\mathbb{Z}, \text{T})$$

$$x \mapsto f(x) = x + 2$$

لكي يكون  $f$  تشاكلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2 ; f(x \times y) = f(x) \text{T} f(y)$$

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجموعة  $\mathbb{Z}$ .

$$\text{لدينا : } f(x) \text{T} f(y) = (x + 2) \text{T} (y + 2)$$

$$= (x + 2)(y + 2) - 2(x + 2) - 2(y + 2) + 6$$

$$= xy - 2 = f(x \times y)$$

إذن  $f$  تشاكل من  $(\mathbb{Z}, \times)$  نحو  $(\mathbb{Z}, \text{T})$ .

لكي يكون  $f$  تقابلا يكفي أن يحقق ما يلي :

$$f(x) = y ; (\exists ! x \in \mathbb{Z}) ; (\forall y \in \mathbb{Z})$$

يعني : المعادلة  $f(x) = y$  ذات المجهول  $x$  تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{Z}$ .

ليكن  $y$  عنصرا من المجموعة  $\mathbb{Z}$ . لدينا :  $x + 2 = y \Leftrightarrow f(x) = y$

$$\Leftrightarrow x = y - 2 \in \mathbb{Z}$$

إذن :  $f(x) = y ; (\exists ! x = y - 2 \in \mathbb{Z}) ; (\forall y \in \mathbb{Z})$

و هذا يعني أن التطبيق  $f$  تقابل من  $\mathbb{Z}$  نحو  $\mathbb{Z}$ .

خلاصة :  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{Z}, \times)$  نحو  $(\mathbb{Z}, \text{T})$ .

### 2 ب

لتكن  $x$  و  $y$  و  $z$  ثلاثة أعداد نسبية ، لدينا من جهة أولى :

$$(x * y) \text{T} z = (x * y)z - 2(x * y) - 2z + 6$$

$$= (x + y - 2)z - 2(x + y - 2) - 2z + 6$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

و من جهة ثانية لدينا :  $(x \text{T} z) * (y \text{T} z) = (x \text{T} z) + (y \text{T} z) - 2$

$$= (xz - 2x - 2z + 6) + (yz - 2y - 2z + 6) - 2$$

$$= xz + yz - 4z - 2x - 2y - 2z + 10$$

نستنتج أن :  $\forall (x, y, z) \in \mathbb{Z}^3 ; (x * y) \text{T} z = (x \text{T} z) * (y \text{T} z)$

أي : القانون  $\text{T}$  توزيعي على \* في  $\mathbb{Z}$ .

### 3

لنبين أن :  $(\mathbb{Z}, *, \text{T})$  حلقة تبادلية و واحدية

•  $\text{T}$  يقبل عنصرا محايدا في  $\mathbb{Z}$

• زمرة تبادلية  $(\mathbb{Z}, *)$   
• قانون تجميعي  
• توزيعي على \*

•  $\text{T}$  تبادلي في  $\mathbb{Z}$

حصلنا من خلال الأجوبة السابقة على المعلومات التاليتين :

(1) زمرة تبادلية  $(\mathbb{Z}, *)$  و (2) القانون  $\text{T}$  توزيعي على القانون \*

لدينا  $f$  تشاكل تقابلي من  $(\mathbb{Z}, \times)$  نحو  $(\mathbb{Z}, \text{T})$

إذن نستنتج البنية الجبرية للمجموعة  $(\mathbb{Z}, \text{T})$  انطلاقا من البنية الجبرية

للمجموعة  $(\mathbb{Z}, \times)$  و ذلك عن طريق التطبيق  $f$ .

لأنه و كما نعلم : التشاكل التقابلي يُحوّل البنية الجبرية لمجموعة الانطلاق

إلى مجموعة الوصول.

بما أن الضرب  $\times$  تبادلي و تجميعي في  $(\mathbb{Z}, \times)$  و يقبل 1 كعنصر محايد.

فإن : (1) القانون  $\text{T}$  تبادلي في  $\mathbb{Z}$  و (2) القانون  $\text{T}$  تجميعي في  $\mathbb{Z}$  (4)

و  $f(1) = 3$  عنصر محايد للقانون  $\text{T}$  في  $\mathbb{Z}$  (5)

إذن من النتائج (1) و (2) و (3) و (4) و (5) نستنتج أن  $(\mathbb{Z}, *, \text{T})$

حلقة تبادلية و واحدة وحدتها العدد النسبي 3.

### 4 أ

ليكن  $x$  و  $y$  عنصرين من المجموعة  $\mathbb{Z}$ . لدينا :

$$x \text{T} y = 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 2$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(y - 2) - 2(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) = 0 \text{ أو } (x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2 \text{ أو } x = 2$$



1

II

أفترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى:

$$\frac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)} = \frac{a - 0}{ae^{\frac{i\pi}{3}} - 0} = e^{\frac{-i\pi}{3}} \text{ لدينا :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} OA = OB \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ يعني : } \left\{ \begin{array}{l} \frac{OA}{OB} = 1 \\ (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن :}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \frac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)} \right| = 1 \\ \arg \left( \frac{aff(A) - aff(O)}{aff(B) - aff(O)} \right) \equiv \frac{-\pi}{3} [2\pi] \end{array} \right. \text{ إذن :}$$

و هذا يعني أن المثلث  $OAB$  متساوي الساقين رأسه  $O$  و قياس إحدى زواياه و هي الزاوية  $\widehat{O}$  يساوي  $60^\circ$  .  
إذن  $OAB$  مثلث متساوي الأضلاع .

الطريقة الثانية:

$$OA = |aff(A) - aff(O)| = |a - 0| = |a| \text{ لدينا :}$$

$$OB = |aff(B) - aff(O)| = |b - 0| = |ae^{\frac{i\pi}{3}}| = |a| \text{ لدينا :}$$

$$AB = |aff(B) - aff(A)| = |b - a| \text{ وكذلك :}$$

$$\begin{aligned} &= \left| ae^{\frac{i\pi}{3}} - a \right| = \left| a \left( e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right) \right| = |a| \cdot \left| e^{\frac{i\pi}{3}} - 1 \right| \\ &= |a| \cdot \left| \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right| = |a| \cdot \left| \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right| = |a| \end{aligned}$$

نستنتج إذن أن  $OA = OB = AB$  و  $A \neq B \neq C$  إذن  $OAB$  مثلث متساوي الأضلاع .

1

2

II

$$r_M \left( \frac{\pi}{3} \right)$$

$$(P) \longrightarrow (P)$$

لدينا  $r$  دوران مُعرّف بما يلي :

$$r(A_1) = A \text{ : إذن } A_1 = r^{-1}(A) \text{ : نطلق من الكتابة :}$$

و منه حسب التعريف العكسي للدوران  $r$  نكتب :

$$(aff(A) - aff(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}} (aff(A_1) - aff(M))$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} (a_1 - z) \text{ : يعني}$$

$$(a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 - e^{\frac{i\pi}{3}} z \text{ : يعني}$$

$$e^{\frac{i\pi}{3}} a_1 = a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z \text{ : يعني}$$

$$a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} (a - z + e^{\frac{i\pi}{3}} z) \text{ : يعني}$$

$$a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}} a - e^{-\frac{i\pi}{3}} z + z \text{ : يعني}$$

$$e^{-\frac{i\pi}{3}} = \cos \left( \frac{-\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{-\pi}{3} \right) \text{ : من جهة أخرى لدينا :}$$

$$= \cos \left( \frac{\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ب

4

تكون الحلقة  $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$  كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر .

ليكن  $x$  قاسما للصفر في  $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$  .

$$\exists y \in \mathbb{Z} \setminus \{2\} ; x \Gamma y = y \Gamma x = 2$$

و منه حسب نتيجة السؤال (4) أ) :  $x = 2$  أو  $y = 2$

إذن لا وجود لأي قاسم للصفر لأن قواسم الصفر إن وجدت يجب أن تخالف العنصر المحايد 2 و بالتالي  $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$  حلقة كاملة .

ج

4

تكون الحلقة الواحدية  $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$  جسما إذا كان كل عنصر من  $\mathbb{Z} \setminus \{2\}$

يقبل ممتابلا (أو مقلوبا) في  $(\mathbb{Z}, \Gamma)$  .

و لذلك نحدد أولا الصيغة العامة لممتابلا لعنصر  $x$  من  $\mathbb{Z}$  بالقانون  $\Gamma$  .

ليكن  $y$  ممتابلا  $x$  بالنسبة للقانون  $\Gamma$  . إذن :

$$x \Gamma y = 3 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 = 3$$

$$\Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow y(x - 2) = (2x - 3)$$

$$\Leftrightarrow y = \left( \frac{2x - 3}{x - 2} \right)$$

و نلاحظ أن الكمية  $\left( \frac{2x - 3}{x - 2} \right)$  ليست دائما عنصرا من  $\mathbb{Z}$  .

العنصر  $1 \in \mathbb{Z}$  مثلا هو ممتابلا 1 بالنسبة لـ  $\Gamma$

و العنصر  $3 \in \mathbb{Z}$  مثلا هو ممتابلا 3 بالنسبة لـ  $\Gamma$

لكن العنصر  $\frac{11}{5} \notin \mathbb{Z}$  هو ممتابلا 7 بالنسبة للقانون  $\Gamma$  .

إذن توجد عناصر من  $\mathbb{Z}$  لا تقبل ممتابلا في  $\mathbb{Z}$  بالنسبة لـ  $\Gamma$  .

و بالتالي فالحلقة  $(\mathbb{Z}, *, \Gamma)$  ليست جسما .

التمرين الثاني

1

I

$$\Delta = a^2(3 + i\sqrt{3})^2 - 8a^2(1 + i\sqrt{3}) \text{ لدينا من جهة أولى :}$$

$$= a^2(6 + 6i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3})$$

$$= 6a^2(1 + i\sqrt{3}) - 8a^2(1 + i\sqrt{3})$$

$$= -2a^2(1 + i\sqrt{3}) \quad (1)$$

$$a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 = a^2(1 - 3 - 2i\sqrt{3}) \text{ و من جهة ثانية لدينا :}$$

$$= a^2(-2 - 2i\sqrt{3})$$

$$= -2a^2(1 + i\sqrt{3}) \quad (2)$$

نستنتج إذن من (1) و (2) أن  $\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2$

2

I

$$\Delta = a^2(-1 + i\sqrt{3})^2 \text{ لدينا :}$$

إذن : المعادلة  $(E)$  تقبل حلين عقديين  $z_1$  و  $z_2$  معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a - (-1 + i\sqrt{3})a}{4} = \frac{3a + i\sqrt{3}a + a - i\sqrt{3}a}{4} = \frac{4a}{4} = a$$

$$z_2 = \frac{(3 + i\sqrt{3})a + (-1 + i\sqrt{3})a}{4} = \frac{3a + i\sqrt{3}a - a + i\sqrt{3}a}{4} = \frac{2a + 2i\sqrt{3}a}{4} = \frac{a(1 + i\sqrt{3})}{2}$$

و بنفس الطريقة لدينا :  $OB_1 = |aff(B_1) - aff(O)| = |b_1|$

و لدينا كذلك :  $A_1M = |aff(M) - aff(A_1)| = |z - a_1|$

$$\begin{aligned} &= \left| z - \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left( \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( 1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| \\ &= \left| \left( \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |b_1| \end{aligned}$$

إذن :  $OB_1 = A_1M$  (2)

من (1) و (2) نستنتج أن كل ضلعين متقابلين في الرباعي  $OA_1MB_1$  متقايسان . إذن :  $OA_1MB_1$  متوازي أضلاع

أقترح طريقتين في الجواب .

الطريقة الأولى :

لدينا :  $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$  إذن :  $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$

و منه :  $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$  يعني :  $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$

و منه :  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$  يعني :  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

و منه :  $e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\left(\frac{a}{b}\right)$  إذن :  $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نوظف بعد ذلك هذه المتساوية فيما سيأتي :

لدينا :  $\begin{cases} r(A_1) = A \\ r(B) = B_1 \end{cases}$  إذن :  $\begin{cases} (a - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(a_1 - z) \\ (b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}}(b - z) \end{cases}$

يعني :  $\begin{cases} (z - a_1) = e^{-\frac{i\pi}{3}}(z - a) \\ (z - b_1) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - b) \end{cases}$

أي :  $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{e^{-\frac{i\pi}{3}}}\right) \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني :  $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = e^{\frac{2i\pi}{3}} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$

يعني :  $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$



بإمكاننا أن نجيب دون استعمال المعطيين  $r(A_1) = A$  و  $r(B) = B_1$

و هذا ما سوف أعرضه الآن كطريقة أخرى للجواب .

الطريقة الثانية :

لدينا :  $b = ae^{\frac{i\pi}{3}}$  إذن :  $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$  و  $\frac{a}{b} = e^{-\frac{i\pi}{3}}$

و من هاتين الكتاتين نستنتج ما يلي :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = e^{-\frac{i\pi}{3}} + e^{\frac{i\pi}{3}} = \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1$$

إذن :  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1$

إذن :  $a_1 = \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z + z$

$$= \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( 1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

و بنفس الطريقة نطلق من الكتابة  $r(B) = B_1$

إذن حسب التعريف العقدي للدوران  $r$  نكتب :

$$(aff(B_1) - aff(M)) = e^{\frac{i\pi}{3}}(aff(B) - aff(M))$$

يعني :  $(b_1 - z) = e^{\frac{i\pi}{3}} \left( ae^{\frac{i\pi}{3}} - z \right)$

يعني :  $b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z$

و لدينا :  $e^{\frac{2i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

و نضيف كذلك :  $e^{\frac{i\pi}{3}} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

إذن بالرجوع إلى آخر تعبير لـ  $b_1$  نكتب :

$$b_1 = ae^{\frac{2i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}z + z = ae^{\frac{2i\pi}{3}} + \left(1 - e^{\frac{i\pi}{3}}\right)z$$

$$= \left( \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( 1 - \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$

$$= \left( \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$$



بصفة عامة ، لكي نبرهن على أن رباعيا ما متوازي أضلاع ، توجد عدة طرق من بينها : القطران لهما نفس المنتصف و صيغة التوازي و الصيغة المتجهية و صيغة التقاييس . لكن أرى أن أسهل طريقة في هذا السؤال هي أن نبرهن أن كل ضلعين متقابلين متقايسان . لأن المسافة في المستوى العقدي ما هي إلا معيار لعدد عقدي .



لنبرهن أن :  $OB_1 = A_1M$  و  $OA_1 = B_1M$

لدينا :  $OA_1 = |aff(A_1) - aff(O)| = |a_1|$

و لدينا :  $B_1M = |aff(M) - aff(B_1)| = |z - b_1|$

$$= \left| z - \left( \frac{-1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a - \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( 1 - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right|$$

$$= \left| \left( \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) a + \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z \right| = |a_1|$$

إذن :  $OA_1 = B_1M$  (1)

### II 3 ب

لنبين أن التكافؤ التالي صحيح .

$$A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة} \Leftrightarrow A_1 \text{ و } B_1 \text{ و } M \text{ نقط مستقيمية}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} \in \mathbb{R} \text{ لدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-a}{b} \left( \frac{z - b}{z - a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} \left( \frac{z - b}{z - a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left( \frac{0 - a}{0 - b} \right) \times \left( \frac{z - b}{z - a} \right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow A \text{ و } B \text{ و } O \text{ و } M \text{ نقط متداورة}$$

### التمرين الثالث

#### 1 أ

ليكن  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1 بحيث :  $3^n - 2^n = 0[n]$  إذن :  $n$  يقسم  $(3^n - 2^n)$

ومنه :  $3^n - 2^n = mn$  ;  $(\exists m \in \mathbb{N})$  (1) →  
ليكن  $p$  أصغر قاسم أولي موجب للعدد  $n$ .

إذن :  $n = ps$  ;  $(\exists s \in \mathbb{N})$  (2) →

من (1) و (2) نستنتج أن :  $3^n - 2^n = msp$  ;  $\epsilon \mathbb{N}$

إذن :  $p$  يقسم  $(3^n - 2^n)$  يعني :  $3^n - 2^n \equiv 0[p]$  (3) →  
لكي نبرهن على أن  $p \geq 5$  يكفي أن نُفَدَّ العبارتين  $p = 2$  و  $p = 3$

**نفترض أن  $p = 2$**

لدينا حسب النتيجة (3) :  $3^n - 2^n \equiv 0 [2]$

إذن حسب الافتراض (4) :  $3^n - 2^n \equiv 0 [2]$  (4) →

و نعلم أنه كيفما كان  $n \in \mathbb{N}$  لدينا :  $2^n \equiv 0 [2]$  (5) →

نجمع المتوافقتين (4) و (5) طرفا بطرف :  $3^n - 2^n + 2^n \equiv 0 [2]$

يعني :  $3^n \equiv 0 [2]$  و منه :  $2$  يقسم  $3^n$  أي :  $2$  يقسم  $3 \times 3^{n-1}$

بما أن :  $2 \wedge 3 = 1$  فإن  $2 \wedge 3^{n-1} = 1$  (7) →  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$

من (6) و (7) نستنتج إذن حسب (Gauss) أن :  $2$  يقسم  $3$

و هذا **تناقض** واضح . إذن :  $p \neq 2$

**نفترض أن  $p = 3$**

لدينا حسب النتيجة (3) :  $3^n - 2^n \equiv 0 [3]$

إذن حسب الافتراض نكتب :  $3^n - 2^n \equiv 0 [3]$  (8) →

و نعلم أن :  $-3^n \equiv 0 [3]$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N})$  (9) →

نجمع المتوافقتين (8) و (9) طرفا بطرف :  $3^n - 2^n - 3^n \equiv 0 [3]$

يعني :  $-2^n \equiv 0 [3]$  أي :  $2^n \equiv 0 [3]$

يعني :  $3$  يقسم  $2^n$  و منه :  $3$  يقسم  $2 \times 2^{n-1}$  (10) →

بما أن :  $2 \wedge 3 = 1$  فإن  $2 \wedge 3^{n-1} = 1$  ;  $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$  (11) →

من (10) و (11) نستنتج حسب Gauss أن :  $3$  يقسم  $2$

و هذا **تناقض** واضح . إذن :  $p \neq 3$

**خلاصة السؤال أ) :**

إذا كان  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعا من 1

و يحقق  $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$  و كان  $p$  أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإن :  $3^n - 2^n \equiv 0 [p]$  و  $p \geq 5$

و لدينا كذلك :  $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$  إذن :  $\frac{b}{a} = e^{\frac{i\pi}{3}}$  ;  $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^3 = e^{i\pi} = -1$

إذن :  $\left(\frac{b}{a}\right)^3 = -1$

و من هذه النتيجة نكتب :  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(\frac{b}{a}\right) = -1$

يعني :  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$

نحن الآن مُسلحون بمتساويتين ثمينتين :

$$(1) \quad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 \quad \text{و} \quad (2) \quad \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\left(\frac{a}{b}\right)$$

ننطلق إذن من نتيجتي السؤال (2) أ) و نوظف المتساوية (1) :

$$\begin{cases} a_1 = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \\ b_1 = \left(\frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a + \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = e^{-\frac{i\pi}{3}}a + e^{\frac{i\pi}{3}}z \\ b_1 = -e^{-\frac{i\pi}{3}}a + e^{-\frac{i\pi}{3}}z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{b}{a}\right)z \\ b_1 = -\left(\frac{a}{b}\right)a + \left(\frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a} \\ b_1 = \frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = z - \frac{a^2}{b} - \frac{bz}{a} \\ z - b_1 = z + \frac{a^2}{b} - \frac{az}{b} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(1 - \frac{b}{a}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(1 - \frac{a}{b}\right)z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z - a_1 = \frac{-a^2}{b} + \left(\frac{a}{b}\right)z \\ z - b_1 = \frac{a^2}{b} + \left(\frac{b}{a}\right)z \end{cases}$$

فيما يلي سوف نوظف المتساوية الثمينة (2) :

$$\Leftrightarrow \frac{z - b_1}{z - a_1} = \frac{\frac{a^2}{b} + \frac{bz}{a}}{\frac{-a^2}{b} + \frac{az}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)\left(a + \left(\frac{b}{a}\right)^2 z\right)}{\left(\frac{a}{b}\right)(z - a)} = \frac{a - \frac{a}{b}z}{z - a}$$

$$= \frac{\left(\frac{-a}{b}\right)(-b + z)}{(z - a)} = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$$

و بالتالي :  $\left(\frac{z - b_1}{z - a_1}\right) = \frac{-a}{b} \left(\frac{z - b}{z - a}\right)$



نعود إذن ، بعد هذه الجولة المرحلة مع  $r$  ، إلى السؤال (د) .

و ننتقل من التعبير التالي :  $a = q(p - 1) + r$

نضرب طرفي هذه المتساوية في العدد  $n$  نحصل على :

$$an = qn(p - 1) + rn$$

يعني :  $rn = an - qn(p - 1)$  (13) →

و لدينا حسب النتيجة (12) :  $an = 1 + b(p - 1)$

نُعوض  $an$  بالتعبير  $1 + b(p - 1)$  في العلاقة (13) نجد :

$$rn = 1 + b(p - 1) - qn(p - 1)$$

أي :  $rn = 1 + (b - qn)(p - 1)$

نضع :  $k = (b - qn)$  إذن :  $rn = 1 + k(p - 1)$

و لإتمام الجواب يكفي أن نُبرهن أن  $k \in \mathbb{N}^*$

لدينا :  $(b, q, n) \in \mathbb{Z}^3$  إذن :  $k \in \mathbb{Z}$

و نُفصل هنا بين ثلاث حالات و هي :  $k = 0$  أو  $k < 0$  أو  $k > 0$

نفترض أن :  $k = 0$  إذن :  $b = qn$

نُعوض إذن  $b$  بالقيمة  $qn$  في النتيجة (12) :  $an - qn(p - 1) = 1$

و منه حسب النتيجة (13) :  $rn = 1$

أي :  $n$  يقسم 1 يعني :  $n = 1$

و هذا تناقض لأن :  $n > 1$  إذن :  $k \neq 0$  (\*) →

نفترض أن :  $k < 0$  إذن :  $b < qn$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد السالب قطعاً  $(p - 1)$  - نجد :

$$-b(p - 1) > -qn(p - 1)$$

نُضيف إلى كلا الطرفين الكمية  $an$  نجد :

$$an - b(p - 1) > an - qn(p - 1)$$

إذن باستعمال النتيجة (12) و (13) نجد :  $1 > rn$  (14) →

و لدينا :  $r > 0$  و  $n > 1$  إذن :  $rn > r$  (15) →

من (14) و (15) نستنتج أن :  $1 > rn > r$  يعني :  $1 > r$

العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الأصغر من 1 هو الصفر .

إذن :  $r = 0$  و هذا تناقض لأن  $r \neq 0$  حسب الملاحظة (2) .

إذن :  $k > 0$  يعني :  $k \in \mathbb{N}^*$

خلاصة السؤال (د) : رأينا في هذا السؤال أنه إذا كان  $r$  و  $q$  على التوالي

باقي و خارج القسمة الأقليدية للعدد  $a$  على العدد  $(p - 1)$  فإنه يوجد عدد

صحيح طبيعي غير منعدم  $k$  بحيث :  $rn = 1 + k(p - 1)$

أو بتعبير جميل :  $rn = 1 + k(p - 1)$  ;  $(\exists k \in \mathbb{N}^*)$  (16) →

**2**

باستعمال البرهان بالخلف ، نفترض وجود عدد صحيح طبيعي  $n$  أكبر

قطعاً من 1 و يحقق :  $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$  . و ليكن  $p$  أصغر قاسم

أولي موجب للعدد  $n$  .

ننتقل من النتيجة (1) :  $2^{p-1} \equiv 1 [p]$

$$3^{p-1} \equiv 1 [p]$$

بما أن :  $(k \in \mathbb{N}^*)$  فإن :  $\begin{cases} 2^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \\ 3^{k(p-1)} \equiv 1 [p] \end{cases}$

و منه :  $\begin{cases} -2 \times 2^{k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3 \times 3^{k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases}$

يعني :  $\begin{cases} -2^{1+k(p-1)} \equiv -2 [p] \\ 3^{1+k(p-1)} \equiv 3 [p] \end{cases}$



**1 ب**

نعلم أن  $p$  عدد أولي و يخالف العدد الأولي 2 إذن :  $p \wedge 2 = 1$

و منه حسب Fermat :  $2^{p-1} \equiv 1 [p]$

و بنفس الطريقة  $p$  عدد أولي يُخالف العدد الأولي 3 إذن :  $p \wedge 3 = 1$

و منه حسب Fermat :  $3^{p-1} \equiv 1 [p]$

**1 ج**

يكفي أن نبرهن على أن :  $n \wedge (p - 1) = 1$  ثم نستعمل Bezout .

في البداية و جب التذكير بخاصية قوية و مهمة تربط بين مفهوم التفكيك إلى

جداء عوامل أولية و مفهوم القاسم المشترك الأكبر . و سوف أنكر بها

باستعمال أمثلة فقط دون الخوض في مناهات الرموز الرياضية .

لاحظ الأمثلة التالية :

$$(2^3 \times 5^4 \times 7^6) \wedge (2^1 \times 5^6 \times 7^3 \times 11^2) = (2^1 \times 5^4 \times 7^3)$$

$$(2^5 \times 7^8) \wedge (3^4 \times 11^6) = 1$$

$$(2^7 \times 3^4 \times 13) \wedge (13 \times 11^4) = 13$$

$$(13^5 \times 2^7 \times 3^2) \wedge (5^5 \times 7 \times 11^2) = 1$$



بالعودة إلى السؤال (ج) : ليكن  $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times p_3^{\alpha_3} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}$

تفكيك العدد  $n$  إلى جداء عوامل أولية بحيث :  $p < p_2 < \dots < p_i$

و ليكن  $q_1^{r_1} \times q_2^{r_2} \times q_3^{r_3} \times \dots \times q_j^{r_j}$  تفكيك العدد  $(p - 1)$

إلى جداء عوامل أولية بحيث :  $q < q_2 < \dots < q_j$

بما أن  $p$  هو أصغر قاسم أولي للعدد  $n$  و بما أن  $(p - 1) < p$

فإن :  $q < q_1 < q_2 < \dots < q_j < p < p_2 < \dots < p_i$

نلاحظ أن الأعداد الأولية  $q$  كلها تخالف الأعداد الأولية  $p$  . إذن :

$$(p^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_i^{\alpha_i}) \wedge (q_1^{r_1} \times q_2^{r_2} \times \dots \times q_j^{r_j}) = 1$$

يعني :  $n \wedge (p - 1) = 1$

و منه حسب Bezout :  $\exists (a, u) \in \mathbb{Z}^2 ; an + u(p - 1) = 1$

نضع  $b = -u$  إذن :  $\exists (a, b) \in \mathbb{Z}^2 ; an - b(p - 1) = 1$  (12) →

ملاحظة 1 : من هذه النتيجة الأخيرة يُمكن أن نستخرج باستعمال

مبرهنة Besout العكسية ما يلي :

$$(*) \rightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge (p - 1) = 1 \\ n \wedge b = 1 \\ n \wedge (p - 1) = 1 \end{cases}$$

خلاصة السؤال (ج) : إذا كان  $n$  عددا صحيحا طبيعيا أكبر قطعاً من 1

و يحقق  $3^n - 2^n \equiv 0 [n]$  و كان  $p$  أصغر قواسمه الأولية الموجبة

فإنه يوجد عدنان نسبيين  $a$  و  $b$  بحيث :  $an - b(p - 1) = 1$

**1 د**

ليكن  $r$  و  $q$  على التوالي باقي و خارج القسمة الأقليدية لـ  $a$  على  $(p - 1)$  .

$$\begin{cases} (q, r) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \\ a = q(p - 1) + r \\ 0 \leq r < p - 1 \end{cases}$$

ملاحظة 2 : قبل أن نجيب على السؤال (د) لاحظ أنه بإمكاننا

أن نبين أن  $r > 0$  و سوف نحتاج هذه النتيجة فيما سيأتي .

لدينا :  $r \geq 0$  إذن  $r = 0$  أو  $r > 0$  .

نفترض أن  $r = 0$  إذن :  $a = q(p - 1)$

يعني :  $(p - 1)$  يقسم  $a$  و منه :  $a \wedge (p - 1) = (p - 1)$

إذن حسب النتيجة (\*) :  $(p - 1) = 1$

يعني :  $p = 2$  . و هذا تناقض لأن  $p \geq 5$

إذن :  $0 < r < (p - 1)$

$$v'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} \quad \text{و لدينا :}$$

- إذا كان  $x = 1$  : فإن  $v'(x) = 0$
- إذا كان  $x > 1$  : فإن  $v'(x) < 0$
- إذا كان  $x < 1$  : فإن  $v'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} v(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x + 1) = \ln(0^+) - 0 + 1 = -\infty - 0 + 1 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right) = (+\infty)(0 - 1 + 0) = -\infty$$

نستنتج إذن جدول تغيرات الدالة  $v$  كما يلي :

$x$	0	1	$+\infty$
$v'(x)$		0	-
$v$	$-\infty$	-2	$-\infty$

نلاحظ من خلال هذا الجدول أن الدالة  $v$  :

- متصلة على المجال  $]0; +\infty[$ .
- تزايدية على المجال  $]0; 1]$ .
- تناقصية على المجال  $]1; +\infty[$ .
- $v(1) = -2$

إذن  $-2$  قيمة قصوية للدالة  $v$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

يعني  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; v(x) \leq -2 < 0$

يعني  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; v(x) < 0$

يعني  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; \ln x - x + 1 < 0$

يعني  $\forall x \in ]0; +\infty[ ; \ln x < x - 1$

و بما أن :  $]1; +\infty[ \subset ]0; +\infty[$

فإن :  $\forall x \in ]1; +\infty[ ; \ln x < x - 1$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]1; +\infty[$  . لدينا :  $h(x) = \frac{x-1}{x \ln x}$

$$h'(x) = \frac{x \ln x - (x-1)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2} = \frac{x \ln x - (x \ln x + x - \ln x - 1)}{(x \ln x)^2} = \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2}$$

و نعلم أن :  $(\forall x > 1) ; (\ln x - x + 1) < 0$

و كذلك :  $(\forall x > 1) ; (x \ln x)^2 > 0$

إذن :  $(\forall x > 1) ; \frac{\ln x - x + 1}{(x \ln x)^2} < 0$

يعني :  $(\forall x > 1) ; h'(x) < 0$

أي أن الدالة  $h$  تناقصية قطعاً على المجال  $]1; +\infty[$  .

$$\begin{cases} -2^{2m} \equiv -2 [p] \\ 3^{2m} \equiv 3 [p] \end{cases} \quad \text{و منه باستعمال النتيجة (16) نكتب :}$$

$$(17) \rightarrow 3^{2m} - 2^{2m} \equiv 1 [p]$$

$$\text{و لدينا حسب النتيجة (3) : } 3^n - 2^n \equiv 0 [p]$$

$$\text{إذن : } 3^n \equiv 2^n [p]$$

$$\text{و بما أن } (r \in \mathbb{N}^*) \text{ فإن : } 3^{2m} \equiv 2^{2m} [p]$$

$$\text{و منه : } (18) \rightarrow 2^{2m} - 3^{2m} \equiv 0 [p]$$

نجمع المتوافقين (17) و (18) طرفاً بطرف نجد :

$$3^{2m} - 2^{2m} + 2^{2m} - 3^{2m} \equiv 1 + 0 [p]$$

يعني :  $0 \equiv 1 [p]$  يعني كذلك :  $1 \equiv 0 [p]$  أي :  $p$  يقسم 1

و منه  $p = 1$  لأن العدد الصحيح الطبيعي الوحيد الذي يقسم 1 هو نفسه .

و هذا **تناقض** لأن  $p \geq 5$  إذن لا وجود له في  $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$  .

**خلاصة التمرين بأكمله :**

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\} ; 3^n - 2^n \not\equiv 0 [n]$$

### التمرين الرابع

#### الجزء الأول

#### 1 أ



$$\text{لدينا : } \begin{cases} h(x) = \frac{x-1}{x \ln x} ; \forall x > 1 \\ h(1) = 1 \end{cases}$$

نضع :  $\varphi(x) = x \ln x$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{x \ln x}{x-1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{1}{\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1}}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1}} \\ &= \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\varphi(x) - \varphi(1)}{x-1} \right)} = \frac{1}{\varphi'_d(1)} \end{aligned}$$

و لدينا :  $\varphi(x) = x \ln x$  إذن :  $\varphi'(x) = \ln x + 1$

يعني :  $\varphi'_d(1) = \varphi'_g(1) = \varphi'(1) = \ln(1) + 1 = 1$

و بالتالي :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \frac{1}{\varphi'_d(1)} = \frac{1}{1} = 1 = h(1)$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = h(1)$

و هذا يعني أن الدالة  $h$  دالة متصلة على يمين 1

#### 1 ب

نعتبر الدالة العددية  $v$  المعرفة على المجال  $]0; +\infty[$  بما يلي :

$$v(x) = \ln x - x + 1$$

لندرس تغيرات الدالة  $v$  على المجال  $]0; +\infty[$  .

لدينا  $v$  عبارة عن تشكيلة منسجمة من الدوال المتصلة و القابلة للإشتقاق

على المجال  $]0; +\infty[$  . إذن  $v$  قابلة للإشتقاق على  $]0; +\infty[$  .

## 1 ب

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]1; +\infty[$ .

$$\begin{aligned} g(x) - \ln 2 &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt \\ &= \int_x^{x^2} \left( \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left( \frac{\sqrt{t}}{t \ln t} - \frac{1}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left( \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt \end{aligned}$$



## 1 ج

باستعمال تقنية تغيير المتغير نضع :  $\sqrt{t} = u$

إذن :  $dt = 2u du$  يعني  $\frac{du}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

• إذا كان  $t = x$  فإن  $u = \sqrt{x}$

• إذا كان  $t = x^2$  فإن  $u = x$

إذن آخر تكامل حصلنا عليه يصبح :

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \left( \frac{\sqrt{t} - 1}{t \ln t} \right) dt &= \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{u - 1}{u^2 \ln(u^2)} \right) (2u du) \\ &= \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{u - 1}{2u^2 \ln u} \right) (2u du) \\ &= \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{u - 1}{u \ln u} \right) du \end{aligned}$$

إذن :  $(\forall x > 1) ; g(x) - \ln 2 = \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{1}{u \ln u} \right) du$

*Remarque : u et t sont des paramètres d'intégration qu'on peut schématiser comme des espaces mémoires temporels*

## 2 أ

ليكن  $x > 1$  وليكن  $t \in [\sqrt{x}; x]$

لدينا الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]1; +\infty[$ .

إذن فهي تناقصية على المجال  $[\sqrt{x}; x]$  لأن  $x > 1$ .

بما أن :  $\sqrt{x} \leq t \leq x$  فإن :  $h(x) \leq h(t) \leq h(\sqrt{x})$

يعني :  $h(x) \leq \left( \frac{t-1}{t \ln t} \right) \leq h(\sqrt{x})$

إذن :  $\int_{\sqrt{x}}^x h(x) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x h(\sqrt{x}) dt$

يعني :  $h(x) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) \int_{\sqrt{x}}^x 1 dt$

يعني :  $h(x) [t]_{\sqrt{x}}^x \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x}) [t]_{\sqrt{x}}^x$

يعني :  $h(x)(x - \sqrt{x}) \leq \int_{\sqrt{x}}^x \left( \frac{t-1}{t \ln t} \right) dt \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$

و بالتالي حسب نتيجة السؤال ج)  $(\forall x > 1)$  نكتب :

$$(*) \quad h(x)(x - \sqrt{x}) \leq g(x) - \ln 2 \leq h(\sqrt{x})(x - \sqrt{x})$$

## 2 أ

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x \ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{x \ln x} \right) - \left( \frac{1}{x \ln x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\ln x} \right) - \left( \frac{1}{x \ln x} \right) = \left( \frac{1}{+\infty} \right) - \left( \frac{1}{+\infty} \right) = 0 \end{aligned}$$

نُلخص النتائج المتعلقة بالدالة  $h$  في الجدول التالي :

$x$	1	$+\infty$
$h'(x)$	-	
$h$	1	0

## 2 ب

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة  $h$  أن الدالة  $h$  متصلة و تناقصية قطعاً على المجال  $]1; +\infty[$  بحيث :

$$h(]1; +\infty[) = ] \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) ; h(1) ] = ]0; 1]$$

إذن  $h$  تقابل من المجال  $]1; +\infty[$  نحو المجال  $]0; 1]$ .

أي :  $\forall x \in ]1; +\infty[ ; \exists ! y \in ]0; 1] : y = h(x)$

أو بتعبير آخر :  $\forall x \in ]1; +\infty[ ; \exists ! h(x) \in ]0; 1]$

يعني :  $(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$

## الجزء الثاني

## 1 أ

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]1; +\infty[$ .

لاحظ في البداية أن :  $(t \ln t)' = 1 + \ln t$

نستغل إذن هذه الملاحظة أثناء الحساب .

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt &= \int_x^{x^2} \left( \frac{1 + \ln t - \ln t}{t \ln t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \left( \frac{1 + \ln t}{t \ln t} \right) dt - \int_x^{x^2} \left( \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \int_x^{x^2} \frac{(t \ln t)'}{t \ln t} dt - \int_x^{x^2} \frac{1}{t} dt \\ &= [\ln(t \ln t)]_x^{x^2} - [\ln t]_x^{x^2} \\ &= (\ln(x^2 \ln(x^2)) - \ln(x \ln x)) - (\ln(x^2) - \ln x) \\ &= \ln \left( \frac{x^2 \ln(x^2)}{x \ln x} \right) - \ln \left( \frac{x^2}{x} \right) = \ln \left( \frac{2x^2 \ln(x)}{x \ln x} \right) - \ln(x) \\ &= \ln(2x) - \ln(x) = \ln \left( \frac{2x}{x} \right) = \ln 2 \end{aligned}$$

$$(\forall x > 1) ; \int_x^{x^2} \frac{1}{t \ln t} dt = \ln 2 \quad \text{و بالتالي :}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq \frac{h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2}{x}$$

$x \rightarrow +\infty$

$+\infty$

إذن حسب خاصية الترتيب و النهايات نستنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$   
 بالنسبة لنهاية  $\frac{g(x)}{x}$  بجوار  $+\infty$  ننطلق من التأيير الثمين المحصل عليه في  
 السؤال (2) أ) كما سوف نستعمل أثناء الحساب النهاية المحصل عليها سابقا  
 و هي :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$  لدينا :

$$(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 \leq g(x) \leq (x - \sqrt{x})h(\sqrt{x}) + \ln 2$$

نضرب طرفي هذا التأيير في العدد الموجب قطعاً  $\frac{1}{x}$  نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

ثم نحسب نهايتي طرفي هذا التأيير بجوار  $+\infty$  نحصل على :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \\ &= \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right)(0) + \frac{\ln 2}{+\infty} = (1 - 0)(0) + 0 = 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{(\sqrt{x})^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)h(t) + \frac{\ln 2}{t^2} \\ &= \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right)(0) + \frac{\ln 2}{(+\infty)^2} = 0 \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(x) + \frac{\ln 2}{x} \leq \frac{g(x)}{x} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x}\right)h(\sqrt{x}) + \frac{\ln 2}{x}$$

$x \rightarrow +\infty$        $x \rightarrow +\infty$

**0**      **0**

إذن حسب خاصية النهايات و الترتيب نستنتج أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0$

## 2 ب

نضرب أطراف التأيير (\*) في العدد الموجب قطعاً  $\left(\frac{1}{x-1}\right)$  نجد :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x-1} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

بعد ذلك نحسب نهايتي طرفي هذا التأيير على اليمين 1 نجد :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}h(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(x) = \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(1) = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\right)h(\sqrt{x}) \\ &= \left(\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1} + 1}\right)h(\sqrt{1}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$\left(\frac{x - \sqrt{x}}{x-1}\right)h(x) \leq \frac{g(x) - \ln 2}{x-1} \leq \left(\frac{x - \sqrt{x}}{x-1}\right)h(\sqrt{x})$$

$x \rightarrow 1^+$        $x \rightarrow 1^+$

**1/2**

و بالتالي :  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{g(x) - g(1)}{x-1}\right) = \frac{1}{2}$

أي أن الدالة  $g$  قابلة للإشتقاق على اليمين في 1 و  $g'_d(1) = \frac{1}{2}$ .

## 2 ج

لدينا حسب التأيير الوارد في السؤال (2) أ) :

$$(\forall x > 1) ; g(x) \geq h(x)(x - \sqrt{x}) + \ln 2$$

لنحسب نهاية  $(x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2$  بجوار  $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x})h(x) + \ln 2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x})(x-1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \frac{(x-1)}{x \ln x} + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\frac{x-1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0^+}\right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{+\infty}}\right) \left(1 - \frac{1}{+\infty}\right) + \ln 2 \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (+\infty)(1 - 0)(1 - 0) + \ln 2 \\ &= (+\infty)(1)(1) + \ln 2 = +\infty \end{aligned}$$





### 3 ب

لدينا حسب نتيجة السؤال (2 ب) من الجزء الأول :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < h(x) \leq 1$$

نلاحظ أن :  $x \geq 1 \Rightarrow \sqrt{x} \geq 1$

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < h(\sqrt{x}) \leq 1$$

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < \frac{1}{2} h(\sqrt{x}) \leq \frac{1}{2}$$

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

و من هذه الكتابة نستنتج أن دالة تزايدية قطعاً على المجال  $]1; +\infty[$  .  
و لإنشاء جدول تغيرات  $g$  نستدعي النتائج التي حصلنا عليها من قبل و هي :

■ معرفة و متصلة على  $]1; +\infty[$

■ تزايدية قطعاً على  $]1; +\infty[$

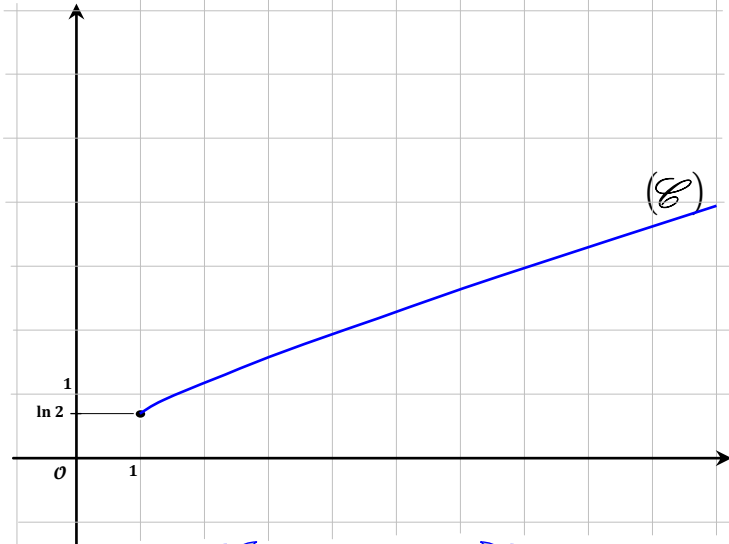
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = g(1) = \ln 2$$

نرسم إذن جدول تغيرات  $g$  كما يلي :

$x$	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g$	$\ln 2$	$+\infty$

### 3 ج



### الجزء الثالث

#### 1 ا

ليكن  $x$  عنصراً من المجال  $]1; +\infty[$  .

$$k(x) = g(x) - x + 1$$

بما أن  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$

فإن  $k$  قابلة للاشتقاق على  $]1; +\infty[$  و لدينا :  $k'(x) = g'(x) - 1$

لدينا حسب نتيجة السؤال (3 ب) من الجزء الثاني :

$$(\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2}$$

### 3 ا

**أذكر** في البداية بما يلي : إذا كانت  $f$  دالة متصلة على مجال  $I$  و كان  $a$  عنصراً من المجال  $I$  . فإن  $f$  تقبل عدة دوال أصلية على المجال  $I$  و بالخصوص تقبل دالة أصلية  $F$  التي تنعدم في  $a$  و تحقق :

$$\begin{cases} F(a) = 0 \\ F'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$F : I \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

**انتهى التذكير**

ليكن  $a$  عنصراً من المجال  $]1; +\infty[$  .

نعتبر الدالة العددية  $u$  المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بما يلي :

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

نلاحظ أن  $u$  دالة متصلة على  $]1; +\infty[$

و ذلك حسب المبرهنات العامة للاتصال .

إذن :  $u$  تقبل عدة دوال أصلية على  $]1; +\infty[$  و بالخصوص  $u$  تقبل دالة أصلية  $v$  التي تنعدم في  $a$  و معرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v(a) = 0 \\ v'(x) = u(x) \end{cases}$$

$$v : ]1; +\infty[ \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_a^x u(t) dt$$

و بالتالي بالرجوع إلى تعريف الدالة  $g$  نكتب :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt ; x > 1 \\ &= \int_x^a \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt + \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= \int_a^{x^2} \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt - \int_a^x \frac{1}{\sqrt{t} \ln t} dt \\ &= v(x^2) - v(x) \end{aligned}$$

نحصل إذن على العلاقة التالية :  $g(x) = v(x^2) - v(x) ; x > 1$   
انطلاقاً من الدوال  $x \rightarrow x^2$  و  $v$  و  $x \rightarrow x$  نستطيع القول ، باستعمال المبرهنات العامة للاشتقاق مركب دالتين ، أن  $g$  قابلة للاشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  .

و لدينا :  $(\forall x > 1) ; g'(x) = (v(x^2) - v(x))'$

$$= 2x v'(x^2) - v'(x)$$

$$= 2x u(x^2) - u(x)$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2} \ln(x^2)} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x} = \frac{2x}{2x \ln x} - \frac{1}{\sqrt{x} \ln x}$$

$$= \frac{x}{x \ln x} - \frac{\sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{x - \sqrt{x}}{x \ln x} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x})^2 \ln(\sqrt{x}^2)}$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} \ln \sqrt{x}} \right) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$$

و بالتالي :  $(\forall x > 1) ; g'(x) = \frac{1}{2} h(\sqrt{x})$

## 1 II

لدينا  $(u_n)_{n \geq 0}$  متتالية تزايدية قطعا .  
 و بما أنها مكبورة بالعدد  $\alpha$  ( لأن  $u_n < \alpha$   $(\forall n \geq 0)$  ) حسب (1 أ) )  
 فإنها مقاربة و نهايتها  $\ell$  تحقق :  $1 + g(\ell) = \ell$   
 و رأينا أن هذه المعادلة تقبل حلا وحيدا في المجال  $]1; +\infty[$  و هو  $\alpha$  .

$$\text{إذن : } \ell = \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \alpha$$

## 2 II

نعتبر الدالة العددية  $\psi$  المعرفة على المجال  $]1; +\infty[$  بما يلي :  
 بما أن  $g$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  .  
 فإن  $\psi$  قابلة للإشتقاق على المجال  $]1; +\infty[$  .  
 و منه  $\psi$  قابلة للإشتقاق على أي مجال يوجد ضمن  $]1; +\infty[$  .

نختار المجال  $]u_n; \alpha[$  الذي يوجد ضمن  $]1; +\infty[$   
 ( و ذلك لأن :  $1 \leq u_n < \alpha$   $(\forall n \geq 0)$  )  
 إذن بتطبيق مبرهنة التزايديات المنتهية (TAF)  
 على الدالة  $\psi$  في المجال  $]u_n; \alpha[$  نجد :

$$\exists c \in ]u_n; \alpha[ ; \frac{\psi(u_n) - \psi(\alpha)}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$\text{لدينا : } \begin{cases} \psi(u_n) = 1 + g(u_n) = u_{n+1} \\ \psi(\alpha) = 1 + g(\alpha) = \alpha \end{cases}$$

$$\text{إذن : } \exists c \in ]u_n; \alpha[ ; \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} = \psi'(c)$$

$$\text{يعني : } \exists c \in ]u_n; \alpha[ ; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| = |\psi'(c)| \quad (*)$$

لدينا :  $\psi'(c) = g'(c)$  و  $c \in ]u_n; \alpha[$

$$\text{إذن : } 1 \leq u_n < c < \alpha \quad \text{أي : } c \geq 1$$

و منه حسب نتيجة السؤال (3 ب) من الجزء الثاني :  $0 < g'(c) \leq \frac{1}{2}$

$$\text{إذن : } |\psi'(c)| = |g'(c)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{أي : } |\psi'(c)| \leq \frac{1}{2} \quad (**)$$

إذن باستعمال الكتابتين (\*) و (\*\*) نكتب :

$$(\forall n \geq 0) ; \left| \frac{u_{n+1} - \alpha}{u_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{يعني : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$



$$\text{إذن : } (\forall x \geq 1) ; 0 < g'(x) \leq \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{يعني : } (\forall x \geq 1) ; g'(x) < 1$$

$$\text{و منه : } (\forall x \geq 1) ; g'(x) - 1 < 0$$

$$\text{أي : } (\forall x \geq 1) ; k'(x) < 0$$

و هذا يعني أن الدالة  $k$  تناقصية قطعا على المجال  $]1; +\infty[$  .  
 إذن  $k$  تقابل من المجال  $]1; +\infty[$  نحو صورته بالدالة  $k$  .

$$\text{و لدينا : } k(]1; +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) ; k(1) \right[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) - x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{g(x)}{x} - 1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \left( 0 - 1 + \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (-1)(+\infty) = -\infty$$

و بالتالي :  $k$  تقابل من المجال  $]1; +\infty[$  نحو المجال  $] -\infty; \ln 2 ]$  .

## 2 I

لدينا :  $\ln 2 > 0$  إذن  $0 \in ]-\infty; \ln 2 ]$

و بما أن  $k$  تقابل من  $]1; +\infty[$  نحو  $] -\infty; \ln 2 ]$

فإن الصفر يمتلك سابقا واحدا بالدالة  $k$  في المجال  $]1; +\infty[$  .

يعني بتعبير آخر :  $\exists ! \alpha \in ]1; +\infty[ ; k(\alpha) = 0$

$$\text{يعني : } \exists ! \alpha \in ]1; +\infty[ ; g(\alpha) - \alpha + 1 = 0$$

$$\text{يعني : } \exists ! \alpha \in ]1; +\infty[ ; 1 + g(\alpha) = \alpha$$

أو بتعبير لطيف : المعادلة  $1 + g(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  
 في المجال  $]1; +\infty[$  و هو  $\alpha$  .

## 1 II

باستعمال البرهان بالترجع ، نعتبر العبارة  $(P_n)$  التالية :

$$(P_n) : (\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$$

من أجل  $n = 0$  لدينا حسب المعطيات :  $1 \leq u_0 < \alpha$

إذن : العبارة  $(P_0)$  صحيحة .

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  و نفترض أن :  $1 \leq u_n < \alpha$

نُدخل على هذا التأطير الدالة التزايدية قطعا  $g$  نحصل على :

$$g(1) \leq g(u_n) < g(\alpha)$$

ثم نضيف 1 لكل طرف :  $g(1) + 1 \leq g(u_n) + 1 \leq g(\alpha) + 1$

إذن : باستعمال النتائج السابقة نكتب :  $1 < \ln 2 + 1 \leq u_{n+1} < \alpha$

يعني :  $1 \leq u_{n+1} < \alpha$  إذن العبارة  $(P_{n+1})$  صحيحة .

حصلنا إذن على الوضعية التالية :  $(P_0) \text{ est vraie}$  —————

$$\{ (P_n) \text{ implique } (P_{n+1}) ; \forall n \geq 0$$

و بالتالي حسب مبدأ التراجع :  $(P_n) \text{ est toujours vraie}$  :

$$\text{أي : } (\forall n \geq 0) ; 1 \leq u_n < \alpha$$

## 1 II

لدينا حسب آخر نتيجة :  $(\forall n \geq 0) ; u_n < \alpha$

نُدخل الدالة التناقصية قطعا  $k$  على هذه المتفاوتة نجد :

$$(\forall n \geq 0) ; k(u_n) > k(\alpha)$$

و بما أن :  $k(\alpha) = 0$  فإن :  $k(u_n) > 0$   $(\forall n \geq 0)$

$$\text{يعني : } (\forall n \geq 0) ; g(u_n) - u_n + 1 > 0$$

$$\text{يعني : } (\forall n \geq 0) ; 1 + g(u_n) > u_n$$

$$\text{و منه : } (\forall n \geq 0) ; u_{n+1} > u_n$$

و من هذه الكتابة نستنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  تزايدية قطعا .



## ب 2 II

$$\begin{aligned} \text{لدينا : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| &\leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \\ \text{إذن بتغيير } (n+1) \text{ بـ } n \text{ نجد : } |u_n - \alpha| &\leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-2} - \alpha| \\ &\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2} |u_{n-3} - \alpha| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_{n-n} - \alpha| \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } (\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

و يمكن كذلك استعمال البرهان بالترجع .

$$\text{لنبرهن بالترجع على أن : } (\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

من أجل  $n = 0$  لدينا :  $|u_0 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |u_0 - \alpha|$   
إذن الخاصية صحيحة من أجل  $n = 0$  .

$$\text{ليكن } n \in \mathbb{N} \text{ و نفترض أن : } |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

نضرب طرفي هذه المتفاوتة في العدد الموجب  $\frac{1}{2}$  نجد :

$$(\forall n \geq 0) ; \frac{1}{2} |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

$$\text{بما أن : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{فإن : } (\forall n \geq 0) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0 - \alpha|$$

و هذا يعني أن العبارة صحيحة من أجل  $(n+1)$  .  
و بالتالي حسب مبدأ التراجع :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

## ج 2 II

نلاحظ أن  $\left(\frac{1}{2}\right)^n$  متتالية هندسية أساسها عدد موجب قطعاً و أصغر من 1 .

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ و منه : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| = 0$$

نحصل إذن على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0) ; |u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$   
0

أو بتعبير واضح نحصل على الوضعية التالية :

$$(\forall n \geq 0) ; -\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha| \leq (u_n - \alpha) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$   
0

$\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$   
0

و بالتالي حسب مصاديق تقارب المتتاليات نستنتج أن :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - \alpha) = 0$

أي :  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \alpha$