

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة العادية 2014
الموضوع

NS 24

ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵜ
ⵜⴰⵎⴳⴷⴰⵏⵜ ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵜ
ⵏ ⵏⵓⵔⵓⵙⵜ



المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالحسابيات.....(3ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(8ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل.....(2ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

لكل n من \mathbb{N}^* نضع : $a_n = \underbrace{333\dots31}_{n \text{ مرة}}$ (n مرة الرقم 3)

1- تحقق أن العددين a_1 و a_2 أوليان. 0.5

2- بين أن لكل n من \mathbb{N}^* : $3a_n + 7 = 10^{n+1}$ 0.5

3- بين أن لكل k من \mathbb{N} : $10^{30k+2} \equiv 7 \pmod{31}$ 0.75

4- بين أن لكل k من \mathbb{N} : $3a_{30k+1} \equiv 0 \pmod{31}$ ، ثم استنتج أن 31 يقسم a_{30k+1} 0.75

5- بين أنه لكل n من \mathbb{N}^* ، إذا كان $[30] \nmid n$ فإن المعادلة $a_n x + 31y = 1$ لا تقبل حولا في \mathbb{Z}^2 0.5

التمرين الثاني: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\square, +, \times)$ جسم تبادلي و أن $(M_2(\square), +, \times)$ حلقة واحدة صفرها $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

لكل a و b من \square ، نضع : $M(a, b) = \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ ونعتبر المجموعة : $E = \{M(a, b) / (a, b) \in \square^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\square), +)$. 0.5

2- احسب $J^2 = J' J$ حيث : $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ثم استنتج أن E جزء غير مستقر من $(M_2(\square), \times)$ 0.75

3- نعرف على $M_2(\square)$ قانون التركيب الداخلي * بما يلي : $A * B = A \times N \times B$ حيث : $N = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

ونعتبر التطبيق φ من \square^* نحو $M_2(\square)$ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a + ib$ (a و b عدنان حقيقيان) بالمصفوفة $M(a, b)$.

(أ) بين أن φ تشاكل من (\square^*, \times) نحو $(M_2(\square), *)$ 0.5

(ب) نضع : $E^* = E - \{O\}$. بين أن : $\varphi(\square^*) = E^*$ 0.25

(ج) بين أن $(E^*, *)$ زمرة تبادلية. 0.5

4- بين أن : $(\forall (A, B, C) \in E^3) A * (B + C) = A * B + A * C$ 0.5

5- استنتج مما سبق أن $(E, +, *)$ جسم تبادلي. 0.5

التمرين الثالث: (3.5 نقط)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر (O, \vec{u}, \vec{v}) .

ليكن θ عددا حقيقيا بحيث: $q = \frac{p}{2} - \frac{p^2}{4}$

1- نعتبر في المجموعة \square المعادلة التالية: $(E) \quad z^2 - \sqrt{2}e^{i\theta}z + e^{2i\theta} = 0$

(أ) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو: $D = (\sqrt{2}ie^{i\theta})^2$ 0.25

(ب) اكتب على الشكل المثلي z_1 و z_2 حل المعادلة (E) في المجموعة \square . 0.75

2- نعتبر النقط I و J و T_1 و T_2 و A التي ألقاها على التوالي 1 و -1 و $e^{i\frac{p}{4}}$ و $e^{i\frac{p}{4}}$ و $\sqrt{2}e^{iq}$

(أ) بين أن المستقيمين (OA) و (T_1T_2) متعامدان . 0.5

(ب) ليكن K منتصف القطعة $[T_1T_2]$. بين أن النقط O و K و A مستقيمية. 0.25

(ج) استنتج أن المستقيم (OA) هو واسط القطعة $[T_1T_2]$. 0.25

3- ليكن r الدوران الذي مركزه T_1 و قياس زاويته $\frac{p}{2}$

(أ) اعط الصيغة العقدية للدوران r . 0.25

(ب) تحقق أن لحق النقطة B صورة النقطة I بالدوران r هو: $b = \sqrt{2}e^{iq} + i$ 0.5

(ج) بين أن المستقيمين (IJ) و (AB) متعامدان . 0.25

4- حدد لحق النقطة C صورة النقطة A بالإزاحة التي متجهتها $\begin{pmatrix} 1 \\ -v \end{pmatrix}$ 0.25

5- بين أن النقطة A هي منتصف القطعة $[BC]$. 0.25

التمرين الرابع: (8 نقط)

$$f(x) = \frac{-x \ln x}{1+x^2}; \quad x > 0$$

$$f(0) = 0$$

I - نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- (أ) بين أن الدالة f متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

(ب) أدرس إشارة $f(x)$ على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

2- (أ) بين أن: $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*)$ 0.25

(ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0, +\infty[$ 0.25

ج) بين أن: $(\exists \alpha \in]0,1[) \quad f'(\alpha) = 0$ 0.5

د) استنتج أن: $f'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$ 0.5

II - نعتبر الدالة F المعرفة على المجال $[0, +\infty[$ بما يلي: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة F في معلم متعامد ممنظم.

1- أ) تحقق أن: $(\forall t \in [1, +\infty[) \quad \frac{1}{2} \leq \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1$ 0.5

ب) بين أن: $(\forall x \in [1, +\infty[) \quad F(1) - \frac{1}{2}(\ln x)^2 \leq F(x) \leq F(1) - \frac{1}{4}(\ln x)^2$ 1

(لاحظ أن: $F(x) = \int_0^1 f(t) dt - \int_1^x \frac{t^2}{1+t^2} \cdot \frac{\ln t}{t} dt$)

ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 1

2- أ) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0, +\infty[$ ثم أحسب $F'(x)$ 0.5

ب) أدرس تغيرات الدالة F على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

III- 1- أ) بين أن: $(\forall t \in]0, +\infty[) \quad -t \ln t \leq \frac{1}{e}$ 0.5

ب) بين أن: $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad f(t) \leq \frac{1}{e}$ 0.25

ج) استنتج أن: $F(x) < x$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0.25

2- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 \in]0, 1[$ و $u_{n+1} = F(u_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

أ) بين أن: $u_n \in]0, 1[$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ 0.5

ب) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.5

ج) حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ 0.5

التمرين الخامس: (2 نقط)

$$g(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} ; x > 0$$
$$g(0) = 0$$

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

1- بين أن الدالة g متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.5

2- لكل عدد حقيقي x من المجال $[0, +\infty[$ ، نضع $L(x) = \int_x^1 g(t) dt$

أ) بين أن الدالة L متصلة على المجال $[0, +\infty[$ 0.25

ب) أحسب $L(x)$ من أجل $x > 0$ 0.25

ج) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} L(x)$ ثم استنتج قيمة $L(0)$ 0.5

3- لكل عدد صحيح طبيعي n أكبر من أو يساوي 1 نضع: $s_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{p=n-1} g\left(\frac{p}{n}\right)$

بين أن المتتالية $(s_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.5

انتهى