الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية **2014**

الموضوع

RS 24

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
ⵜⴰⵎⴰⵡⴰⵙⵜ ⵏ ⵓⵙⵙⵍⵎⴷ ⴰⵏⴰⵎⵓⵔ
ⴷ ⵓⵙⵎⵓⵜⵜⴳ ⴰⵣⵣⴰⵍⴰⵏ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

المادة	**الرياضيات**	**مدة الإنجاز**	**4**
الشعبة أو المسلك	**شعبة العلوم الرياضية (أ) و(ب)**	**المعامل**	**9**

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من ستة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بحساب الاحتمالات........................(2ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات ....(1ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية...........................(3.75ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالأعداد العقدية............................(3.25ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل...................................(7.5ن)
- التمرين السادس يتعلق بالتحليل...................................(2.5ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (2 ن)

نعتبر ثلاثة صناديق U وV و W .

يحتوي الصندوق W على كرة سوداء و كرتين بيضاوين و يحتوي كل صندوق من الصندوقين U و V على كرتين سوداوين و كرتين بيضاوين.

نقوم بالتجربة التالية : نسحب كرة من الصندوق W.إذا كانت هذه الكرة بيضاء نضعها في الصندوق U ثم نسحب منه تآنيا كرتين ، أما إذا كانت هذه الكرة سوداء فنضعها في الصندوق V ثم نسحب منه تآنيا كرتين.

0.25 | 1- ما هو احتمال أن يتم السحب من الصندوق U ؟

0.75 | 2- ما هو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين في نهاية التجربة؟

3- ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المحصل عليها في نهاية التجربة.

1 | حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X

التمرين الثاني: (1 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم.

نضع: $b_n = 2.10^n + 1$ و $c_n = 2.10^n - 1$

0.5 | 1- بين أن: $c_n \not\equiv 0$ ... $b_n \wedge c_n$ ثم استنتج أن b_n و c_n أوليان فيما بينهما.

($a \wedge b$ هو القاسم المشترك الأكبر للعددين الصحيحين a و b)

0.5 | 2- أوجد زوجا (x_n, y_n) من $\mathbb{Z}^2$ يحقق: $b_n x_n + c_n y_n = 1$

التمرين الثالث: (3,75 ن)

نضع $J =]-1,1[$

I- لكل عنصرين a و b من المجال J ، نضع: $a * b = \dfrac{a+b}{1+ab}$

0.75 | 1- تحقق أن: $(\forall (a,b) \in J^2)\ 1 + ab > 0$ ثم استنتج أن $*$ قانون تركيب داخلي في J

0.5 | 2- أ) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي.

0.25 | ب) بين أن $(J,*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده.

0.5 | ج)بين أن $(J,*)$زمرة تبادلية.

II – نعتبر التطبيق f المعرف على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

0.75 | 1- بين أن الدالة f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو J

2- ليكن g التقابل العكسي للتطبيق f (تحديد g غير مطلوب) .

لكل عنصرين x و y من J نضع: $x \perp y = f\left(g(x) \times g(y)\right)$

0.5 | بين أن f تشاكل من$(\mathbb{R}^*, \times)$ نحو $(J^*, \perp)$ حيث: $J^* = J - \{0\}$

3- نذكر أن $(\mathbb{R}^*, \times)$ زمرة تبادلية، ونقبل أن القانون $\perp$ توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في J .

0.5 | بين أن $(J,*,\perp)$ جسم تبادلي.

التمرين الرابع: (3.25 ن)

0.5 | I - 1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 + i = 0$ (a يرمز لحل المعادلة بحيث: $Re(a) > 0$)

0.5 | 2- أ) حدد معيار و عمدة العدد العقدي $1 + a$

0.25 | ب) استنتج أن: $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

0.5 | ج) تحقق أن: $(1+a)(1-a) = 1+i$ ثم استنتج الشكل المثلثي للعدد $1-a$

II - في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ ، نعتبر النقط A و B و M و M'

التي ألحاقها على التوالي هي a و$-a$ و z و z' و نفترض أن: $zz'+i=0$

1- لتكن N النقطة التي لحقها $\overline{z}$ مرافق z

بين أن المستقيمين (ON) و (OM') متعامدان. 0.25

2- أ) بين أن : $z'-a=i\dfrac{z-a}{az}$ 0.25

ب) بين أنه إذا كان $z\neq -a$ فإن : $z'\neq -a$ و $\dfrac{z'-a}{z'+a}=-\dfrac{z-a}{z+a}$ 0.5

3- نفترض أن النقط A و B و M غير مستقيمية.

بين أن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث ABM 0.5

التمرين الخامس:(7.5 نقط)

I - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $f\left(x\right)=\dfrac{-\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن $\left(C\right)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ بحيث: $\|\vec{i}\|=1cm$

1- أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)$ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما. 1

2- أحسب $f'\left(x\right)$ ثم استنتج تغيرات الدالة f على المجال $]0,+\infty[$ 0.75

3- لكل n من $\mathbb{N}^*$ نعتبر الدالة العددية g_n المعرفة على $]0,1[$ بما يلي: $g_n(x)=f(x)-x^n$

أ) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعا على المجال $]0,1[$ 0.25

ب) استنتج أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f\left(\alpha_n\right)=\left(\alpha_n\right)^n$ 0.5

ج) بين أن لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $g_n(\alpha_{n+1})<0$ 0.5

د) بين أن المتتالية $\left(\alpha_n\right)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة. 0.75

4- نضع $l=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$

أ) تحقق أن $0<\alpha_1\leq l\leq 1$ 0.25

ب) تحقق أن: $h(\alpha_n)=n$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$ حيث : $h(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln(x))}{\ln x}$ 0.25

ج) بين أن: $l=1$ 0.5

د) استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\alpha_n\right)^n=0$ 0.25

II - 1 - أ) أدرس إشارة التكامل $\int_x^1 f\left(x\right)dx$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ ، 0.25

ب) باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_x^1 f\left(x\right)dx=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\ln x$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$ 0.5

ج) أستنتج بالوحدة cm^2 مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $\left(C\right)$و المستقيمات التي معادلاتها على التوالي: 0.25

$x=1$ و $x=e^2$ و $y=0$

2- لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع: $u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

أ) بين أنه لكل عددين صحيحين طبيعيين n و k بحيث $n\geq 2$ و $1\leq k\leq n-1$ لدينا: 0.5

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ب) بين أن : $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt\leq u_n\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$ و $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$ 0.5

ج) استنتج أن $\lim_{n\to+\infty} u_n=4$ 0.5

التمرين السادس (2.5 نقط)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^{1} e^{-t^2}dt$

1- لكل x من ، نضع : $k(x)=\int_{1}^{x} e^{-t^2}dt$

أ)تحقق أنه لكل x من المجال $[0,+\infty[$ لدينا: $g(x)=-k(\sqrt{x})$ 0.25

ب) بين أن الدالة g متصلة على $[0,+\infty[$ وقابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ 0.5

ج) احسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$ ثم استنتج أن الدالة g تناقصية قطعا على المجال $[0,+\infty[$ 0.5

2- أ) بين أن: $\frac{g(x)-g(0)}{x}<-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$ $\left(\forall x\in\mathbb{R}_+^*\right)$ 0.75

ب) استنتج أن الدالة g غير قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها. 0.5

انتهى