المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية والتكوين المهني

المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية **2015**
- الموضوع -

NS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالأعداد العقدية.....(3 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالبنيات الجبرية.....(4 ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل.....(6.5 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل .....(3.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3 نقط)

1- نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية: $(E): z^2 - (5+i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

0.25 أ) تحقق أن $(3-i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E)

0.5 ب) حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن: b خ a)

0.25 ج) تحقق أن: $b = (1-i\sqrt{3})a$

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد و ممنظم و مباشر.
لتكن A النقطة التي لحقها a و B النقطة التي لحقها b

0.5 أ) حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{p}{2}$

0.5 ب) بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$

0.5 ج) تحقق أن: $arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

0.5 د) لتكن C نقطة ، لحقها c ، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB وتخالف O و A
حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$

التمرين الثاني: (3 نقط)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث: $x^{1439} \equiv 1436 [2015]$ ؛

0.25 1- علما أن: $1 = 749 \wedge 2015 - 1051 \wedge 1436$ ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما.

2- ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015

0.5 أ) بين أن d يقسم 1436

0.5 ب) استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما.

0.75 3- أ) باستعمال مبرهنة فيرما بين أن: $x^{1440} \equiv 1[5]$ و $x^{1440} \equiv 1[13]$ و $x^{1440} \equiv 1[31]$

(لاحظ أن: $2015 = 5.13.31$)

0.5 ب) بين أن: $x^{1440} \equiv 1[65]$ ثم استنتج أن: $x^{1440} \equiv 1[2015]$

0.5 4- بين أن : x خ 1051 $[2015]$ ؛

التمرين الثالث:(4 نقط)

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R},+,\times)$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع: $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ و نعتبر المجموعة $E = \{M(x) / x \text{ خ } \mathbb{R}\}$

نزود E بقانون التركيب الداخلي T المعرف بما يلي: $M(x)\mathrm{T}M(y)=M(x+y+1)$ $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)$

1- ليكن j التطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E المعرف بما يلي: $j(x)=M(x-1)$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

0.5 أ) بين أن j تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو (E,T)

0.5 ب) بين أن (E,T) زمرة تبادلية.

0.5 2- أ) بين أن: $M(x)'M(y)=M(x+y+xy)$ $(\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2)$

0.5 ب) استنتج أن E جزء مستقر من $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),')$ و أن القانون "$\times$" تبادلي في E

0.5 ج) بين أن القانون "$\times$" توزيعي بالنسبة للقانون "T" في E.

0.5 د) تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في (E,T) و أن I هو العنصر المحايد في $(E,')$.

0.25 3- أ) تحقق أن: $I=M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\})$ $M(x)'M(y)$

0.75 ب) بين أن $(E,\mathrm{T},')$ جسم تبادلي.

التمرين الرابع: (6.5 نقط)

الجزء الأول: لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي:

$f(0)=0$ و $f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right)$ إذا كان $x>0$

ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0.5 1- أحسب: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.25 2- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) أحسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 ج) أحسب $f'(x)$ من أجل $x>0$ ثم استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$

0.25 3- أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}.

0.25 ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته: $y=x$

0.5 ج) أنشئ المنحنى (C). (نأخذ: $e^{-1}=0.4$)

الجزء الثاني: نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0=e^{-1}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

0.5 1- بين بالترجع أن: $e^{-1}\leq u_n<1$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

0.5 2- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.

3- نضع: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=l$

0.25 أ) بين أن: $e^{-1}\leq l\leq 1$

0.5 ب) حدد قيمة l

الجزء الثالث: لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $F(x)=\int_1^x f(t)dt$

0.25 1- أ) بين أن الدالة: $x \mapsto -\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x$ دالة أصلية للدالة: $h: x \mapsto x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$

0.5 ب) بين أن: $(\forall x>0)\quad \int_1^x t\ln^2(t)dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$

0,5 ج) استنتج أن: $(\forall x>0)\quad F(x)=-\frac{3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln(x)+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$

0.25 2- أ) بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$

0.5 ب) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)dx$

التمرين الخامس:(3.5 نقط)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي: $g(0)=\ln 2$ و $g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt$ إذا كان $x>0$

0.5 1- أ) بين أن : $(\forall x>0)\ (\forall t\in[x,2x])\quad e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x}$

0.5 ب) بين أن: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$

0.25 ج) استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .

0.75 2- بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x>0$

0.5 3- أ) بين أن : $(\forall t>0)\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ (يمكنك استعمال مبرهنة التزايدات المنتهية)

0.5 ب) بين أن : $(\forall x>0)\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

0.5 ج) استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0.

انتهى