السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	تصحيح الامتحان الوطني 2015 الدورة العادية	امتحانات وطنية

تمرين 1 :

$$(E):\ z^2-\left(5+i\sqrt{3}\right)z+4+4i\sqrt{3}=0$$

1

أ) $\Delta=\left(5+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(4+4i\sqrt{3}\right)=25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}=6-6i\sqrt{3}=9-6i\sqrt{3}-3=\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$

ب) $a=\dfrac{5+i\sqrt{3}-3+i\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ ، $b=\dfrac{5+i\sqrt{3}+3-i\sqrt{3}}{2}=4$

ج) لدينا : $a\left(1-i\sqrt{3}\right)=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)=1+3=4=b$ إذن : $b=\left(1-i\sqrt{3}\right)a$

2

أ) الصيغة العقدية للدوران $R\left(A,\dfrac{\pi}{2}\right)$ هي : $z'=e^{\frac{\pi}{2}i}(z-a)+a=i(z-a)+a$ ، بما أن $B_1=R(O)$ فإن :

$b_1=i(0-a)+a=-i\,a+a=-i\left(1+i\sqrt{3}\right)+1+i\sqrt{3}=-i-\sqrt{3}+1+i\sqrt{3}=1-\sqrt{3}+i\left(\sqrt{3}-1\right)$

ب) الصيغة العقدية للتحاكي h هي : $z'=k(z-a)+a=\sqrt{3}(z-a)+a$

لتكن $B_1'=R(B_1)$ إذن : $b_1'=\sqrt{3}(b_1-a)+a=\sqrt{3}(-i\,a)+a=a\left(1-i\sqrt{3}\right)=b$

إذن $B_1'=B$ منه : $B=R(B_1)$

ج) لدينا : $\dfrac{b}{b-a}=\dfrac{b}{a-i\sqrt{3}a-a}=\dfrac{b}{-a\sqrt{3}i}=\dfrac{\frac{b}{a}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{-\sqrt{3}i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}{-i}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\dfrac{e^{\frac{-\pi}{3}i}}{e^{-\frac{\pi}{2}i}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{\pi}{6}i}$

بالتالي : $\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

د) بما أن C تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB فإن النقط O و A و B و C متداورة

منه : $\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\in IR$ منه : $\arg\left(\dfrac{c-0}{c-a}\div\dfrac{b-0}{b-a}\right)\equiv 0[\pi]$ منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)-\arg\left(\dfrac{b}{b-a}\right)\equiv 0[\pi]$

منه : $\arg\left(\dfrac{c}{c-a}\right)\equiv\dfrac{\pi}{6}[\pi]$

تمرين 2 : $x^{1439}\equiv 1436[2015]$

1 بما أن : $1436\times1051-2015\times749=1$ فحسب مبرهنة بيزو «Bezout» فإن : $1436\wedge2015=1$

2

أ) لدينا : $x^{1439}\equiv1436[2015]$ إذن : $\exists k\in Z\ /\quad x^{1439}-2015k=1436$

لدينا d/x و $d/2015$ منه: d/x^{1436} و $d/2015k$ منه : $d/x^{1439}-2015k$ بالتالي : $d/1436$

ب) نضع : $x\wedge2015=d$ ، إذن d/x و $d/2015$ إذن حسب السؤال السابق : $d/1436$

إذن : $d/1436\times1051$ و لدينا : $d/2015$ إذن : $d/2015\times749$ إذن : $d/1436\times1051-2015\times749$

منه : $d/1$ ، و بما أن : $d>0$ فإن : $d=1$ ، بالتالي : $x\wedge2015=1$

3

أ) لدينا : $2015=5\times13\times31$ ، بما أن : $x\wedge2015=1$ فإن : $x\wedge(5\times13\times31)=1$ إذن : $\begin{cases}x\wedge5=1\\x\wedge13=1\\x\wedge31=1\end{cases}$

إذن حسب مبرهنة فيرما نستنتج أن : $\begin{cases}x^4\equiv1[5]\\x^{12}\equiv1[13]\\x^{30}\equiv1[31]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}\left(x^4\right)^{360}\equiv1[5]\\\left(x^{12}\right)^{120}\equiv1[13]\\\left(x^{30}\right)^{48}\equiv1[31]\end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases}x^{1404}\equiv1[5]\\x^{1404}\equiv1[13]\\x^{1404}\equiv1[31]\end{cases}$

ب) لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[5] \\ x^{1404} \equiv 1[13] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 5 / x^{1404} -1 \\ 13 / x^{1404} -1 \end{cases}$ منه : $(5 \vee 13)/ x^{1404} -1$ أي : $65 / x^{1404} -1$ أي : $x^{1404} \equiv 1[65]$

مرة أخرى لدينا : $\begin{cases} x^{1404} \equiv 1[65] \\ x^{1404} \equiv 1[31] \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} 65 / x^{1404} -1 \\ 31 / x^{1404} -1 \end{cases}$ منه : $(65 \vee 31)/ x^{1404} -1$ أي : $2015 / x^{1404} -1$

أي : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

4 لدينا : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$ منه : $x^{1440} \equiv 1436\, x[2015]$ و لدينا : $x^{1404} \equiv 1[2015]$

إذن : $1436\, x \equiv 1[2015]$ منه : $\exists \text{~} \in Z \;/\; 1436\, x - 2015\text{~} = 1$

منه : $1436\, x - 2015\text{~} = 1436 \times 1051 - 2015 \times 749$ منه : $1436(x-1051) = 2015(\text{~} - 749)$

منه : $2015 / 1436(x-1051)$ ، و بما أن : $2015 \wedge 1436 = 1$ فإن $2015/(x-1051)$ أي : $x \equiv 1051[2015]$

<u>تمرين 3</u> :

$M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ ، $E = \{M(x) \;/\; x \in IR\}$ ، $\forall (x,y) \in IR^2 \quad M(x) \text{T} M(y) = M(x+y+1)$

$$\begin{aligned} \text{¨} :\; & IR \to E \\ & x \mapsto \text{¨}(x) = M(x-1) \end{aligned}$$

1

أ) لدينا : $\forall (x,y) \in IR^2 \quad \text{¨}(x+y) = M(x+y-1)$

و $\forall (x,y) \in IR^2 \quad \text{¨}(x) \text{T} \text{¨}(y) = M(x-1) \text{T} M(y-1) = M(x-1+y-1+1) = M(x+y-1)$

إذن : $\text{¨}(x+y) = \text{¨}(x) \text{T} \text{¨}(y)$ ، $\forall (x,y) \in IR^2$ إذن : ¨ تشاكل من $(IR,+)$ نحو (E,T)

ب) لدينا $\forall x \in IR \quad \text{¨}(x+1) = M(x)$ إذن $\forall M \in E \;\exists m \in IR \;/\; \text{¨}(m) = M$ أي أن ¨ شمول أي : $\text{¨}(IR) = E$

إذن و بما أن : $(IR\,,+)$ زمرة تبادلية فإن $(E\,,\text{T})$ زمرة تبادلية عنصرها الحايد هو: $\text{¨}(0) = M(-1)$

2

أ) لدينا لكل $(x,y) \in IR^2$:

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-x)(1-y) - 2xy & y(1-x) + x(1+2y) \\ -2x(1-y) - 2y(1+2x) & -2xy + (1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y+xy-2xy & y-xy+x+2xy \\ -2x+2xy-2y-4xy & -2xy+1+2y+2x+4xy \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & y+x+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2y+2x+2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & y+x+xy \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y+xy) \end{pmatrix}$$

$$M(x) \times M(y) = M(x+y+x\,y)$$

ب) بما أن : $(x,y) \in IR^2 \;\Rightarrow\; x+y+x\,y \in IR$

فإن : $(M(x), M(y)) \in E^2 \;\Rightarrow\; M(x+y+x\,y) \in E \Rightarrow M(x) \times M(y) \in E$

إذن E جزء مستقر من $(M_2(IR), \times)$ ، ولدينا أيضا :

$\forall (x,y) \in IR^2 \quad M(x) \times M(y) = M(x+y+xy) = M(y+x+yx) = M(y) \times M(x)$

أي أن القانون $\times$ تبادلي

ج) لدينا : لكل $(x,y,z) \in IR^3$:

$M(x) \times (M(y) \text{T} M(z)) = M(x) \times M(y+z+1) = M(x+y+z+1+x(y+z+1))$

$M(x) \times (M(y) \text{T} M(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$

و $(M(x) \times M(y)) \text{T} (M(x) \text{T} M(z)) = M(x+y+xy) \text{T} M(x+z+xz) = M(x+y+xy+x+z+xz+1)$

$(M(x) \times M(y)) \text{T} (M(x) \text{T} M(z)) = M(2x+y+z+xy+xz+1)$

منه : $M(x) \times (M(y) \text{T} M(z)) = (M(x) \times M(y)) \text{T} (M(x) \text{T} M(z))$

و لكون القانونين $\times$ و T تبادليان فإن : $(M(y) \text{T} M(z)) \times M(x) = (M(y) \times M(x)) \text{T} (M(z) \text{T} M(x))$

إذن : $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E

د) لدينا : $\forall x \in IR \quad M(x) \text{T} M(-1) = M(-1) \text{T} M(x) = M(x-1+1) = M(x)$

إذن $M(-1)$ هي العنصر المحايد في (E,T)

و لدينا: $M(0)=I$ ، و $\forall x\in IR \quad M(x)\times M(0)=M(0)\times M(x)=M(x+0+0)=M(x)$

إذن : I هي العنصر المحايد في $(E,\times)$

أ) لدينا : $(\forall x\in IR-\{-1\})\ M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right)=M\left(x-\frac{x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right)=M\left(\frac{x+x^2-x-x^2}{1+x}\right)=M(0)=I$

3 ب) لدينا : (E,T) زمرة تبادلية عنصرها المحايد : $M(-1)$

القانون $\times$ قانون تركيب داخلي تبادلي في E و تجميعي لأن $E\subset M_2(IR)$ و $(M_2(IR),\times)$ تجميعي

القانون $\times$ توزيعي بالنسبة لـ T في E و له عنصر محايد هو : $I=M(0)$

إذن : $(E,T,\times)$ حلقة واحدية، و بما أن لكل $M(x)\in E-\{M(-1)\}$ مماثلا بالنسبة للقانون $\times$ هو $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ فإن $(E,T,\times)$ جسم تبادلي

__التمرين الرابع :__

__الجزء الأول:__

$$\begin{cases} f(x)=x\left(1+\ln^2 x\right);\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1 لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1+\ln^2 x\right)=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln^2 x\right)=+\infty$)

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\ln^2 x\right)=+\infty$

ما يعني أن (C) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب جوار $+\infty$

2 أ) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+x\ln^2 x=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x+\left(\sqrt{x}\ln x\right)^2=0+0^2=0=f(0)$

إذن f متصلة يمين الصفر

للتذكير : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^r\ \ln(x)=0$ حيث $r\in Q^{*+}$ (في حالتنا : $r=\frac{1}{2}$)

ب) لدينا : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} 1+\ln^2 x=+\infty$ (لأن : $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty$)

إذن $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=+\infty$ ، ما يعني أن الدالة غير قابلة للاشتقاق يمين الصفر ، لكن المنحنى (C) يقبل نصف مماس عمودي في النقطة O له نفس منحى المتجهة $\vec{j}$

ليس من الضروري تحديد منحى نصف المماس، لكنه يساعد على اكتشاف أي خطأ في جدول التغيرات لاحقا

المنحى نعرفه انطلاقا من إشارة النتيجة و يمين أو يسار النهاية(في حالتنا $\begin{cases}+\infty\\0^+\end{cases}\ (+)\times(+)\ \to +$ أي الأعلى أي منحى $\vec{j}$

ج) لدينا : $\forall x>0\quad f'(x)=1+\ln^2 x+x\left(2\ln x\times\frac{1}{x}\right)=1+\ln^2 x+2\ln x=(\ln x+1)^2$

لدينا : $\forall x>0\ \ (\ln x+1)^2\geq 0$ ، و $(\ln x+1)^2=0\ \Leftrightarrow\ \ln x=-1\ \Leftrightarrow\ x=\frac{1}{e}$

إذن $f'(x)$ موجبة على $]0;+\infty[$ و تنعدم في عدد وحيد ، إذن f تزايدية قطعا على $]0;+\infty[$

الرتابة القطعية تستوجب أحد حالتين:

- أن تكون المشتقة لها إشارة سالبة قطعا أو موجبة قطعا على كل المجال
- أن تكون موجبة أو سالبة و أن تنعدم في عدد معدود من الحلول (حل، حلان،...)

أ) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: $f''(x) = 2(\ln x+1)\times\frac{1}{x} = \frac{2}{x}(\ln x+1)$

و لدينا : $x=e^{-1} \Leftrightarrow \ln x+1=0$ و $x>e^{-1} \Leftrightarrow \ln x+1>0$

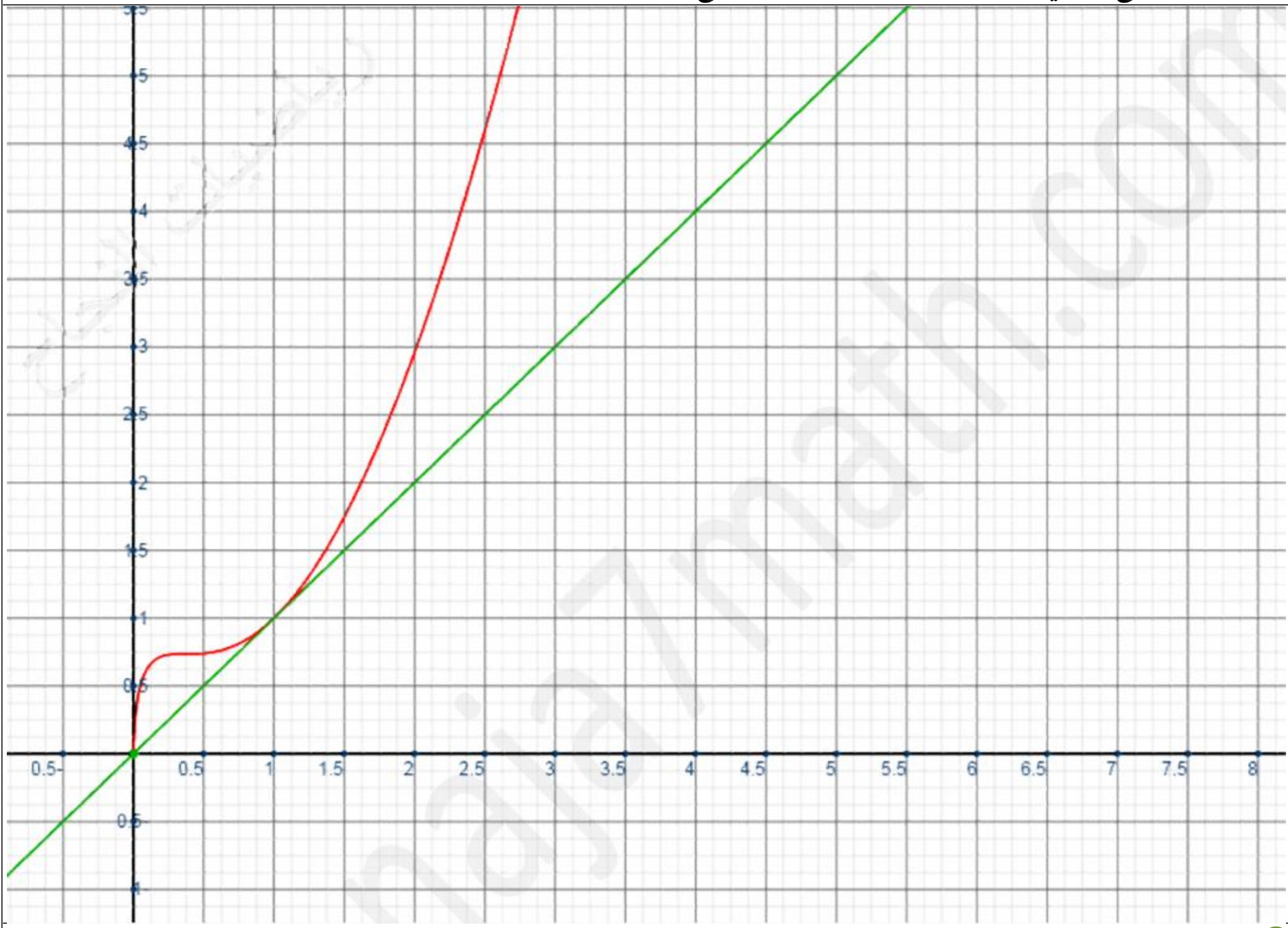
إذن : $f''(x)$ تنعدم و تغير إشارتها في e^{-1} إذن فالمنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1}

ب) لدينا لكل $x \in]0;+\infty[$: : $f(x)-x = x\ln^2 x \ge 0$ و $f(x)-x=0 \Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1$

إذن (C) يوجد فوق المستقيم $(D): y=x$ و يقطعه في النقطة $A(1;1)$

دراسة الوضع النسبي تستوجب أيضا دراسة نقط التقاطع

ج)



الشكل تم إنشاؤه باستعمال برنامج الموقع : Super Graph

الجزء الثاني:

$$\begin{cases} u_0 = e^{-1} \\ u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ n \in IN \end{cases}$$

1) نعلم أن : $e>1$ إذن : $\frac{1}{e} \le \frac{1}{e} < 1$ أي : $\frac{1}{e} \le u_0 < 1$

نفترض أن : $\frac{1}{e} \le u_n < 1$، إذن : $f\left(\frac{1}{e}\right) \le f(u_n) < f(1)$ (لأن f تزايدية على $]0;+\infty[$)

منه : $\frac{2}{e} \le u_{n+1} < 1$ منه : $\frac{1}{e} \le u_{n+1} < 1$ (لأن : $\frac{1}{e} < \frac{2}{e}$)، إذن حسب مبدأ الترجع: $\frac{1}{e} \le u_n < 1 \quad \forall n \in IN$

2) لدينا : $u_{n+1} - u_n = u_n \ln^2(u_n) \quad \forall n \in IN$

و لدينا : $\forall n \in IN \quad \frac{1}{e} \le u_n < 1 \Rightarrow \forall n \in IN \begin{cases} \ln(u_n) < 0 \\ u_n > 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n \in IN \quad u_n \ln^2(u_n) > 0$

إذن : $(u_n)_n$ متتالية تزايدية قطعا، وبما أنها مكبورة بالعدد 1 فهي متقاربة.

يمكن أيضا استعمال السؤال 3) ب) من الجزء الأول

3

أ) لدينا : $\frac{1}{e}\le u_n<1 \quad \forall n\in IN$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}=\frac{1}{e}$ ، إذن : $\frac{1}{e}\le l\le 1$

ب) لدينا: الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{e};1\right]$ و $f\left(\left[\frac{1}{e};1\right]\right)=\left[\frac{2}{e};1\right]\subset\left[\frac{1}{e};1\right]$ و المتتالية $(u_n)_n$ متقاربة نهايتها l

إذن l تحقق المعادلة $f(x)=x$ و التي حسب الجزء الأول تقبل حلين بالظبط 1 و 0

ولكون : $\frac{1}{e}\le l\le 1$ ، فإن : $l=1$

<u>الجزء الثالث:</u> $\forall x\in[0;+\infty[\qquad F(x)=\int_1^x f(t)dt$

1

أ) لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$:

$$H'(x)=\left(\frac{-1}{4}x^2+\frac{1}{2}x^2\ln x\right)'=\frac{-2}{4}x+\frac{1}{2}\left(2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{2}x+x\ln x+\frac{1}{2}x=x\ln x=h(x)$$

إذن الدالة H هي دالة أصلية للدالة h

ب) لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$:

$$\int_1^x t\ln^2(t)dt=\int_1^x\left(\frac{1}{2}t^2\right)'\ln^2(t)dt=\left[\frac{1}{2}t^2\ln^2(t)\right]_1^x-\int_1^x\frac{1}{2}t^2\,2\ln(t)\times\frac{1}{t}dt=\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\int_1^x t\ln(t)dt$$

ج) لدينا لكل $x\in]0;+\infty[$:

$$F(x)=\int_1^x t\left(1+\ln^2(t)\right)dt=\int_1^x t+t\ln^2(t)dt=\int_1^x t\,dt+\int_1^x t\ln^2(t)dt$$

$$F(x)=\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\left[\frac{-1}{4}t^2+\frac{1}{2}t^2\ln t\right]_1^x=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)-\left(\frac{-x^2}{4}+\frac{x^2}{2}\ln x\right)+\left(\frac{-1}{4}\right)$$

$$F(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}=\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)$$

2

أ) نعلم أن الدالة f متصلة على $[0;+\infty[$ ، إذن فهي تقبل دالة أصلية k متصلة و قابلة للاشتقاق على $[0;+\infty[$ ، ومنه : $F(x)=k(x)-k(1) \quad \forall[0;+\infty[$ ، ما يعني أن الدالة F متصلة على $[0;+\infty[$

ب)

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{2}\ln^2(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{-3}{4}+\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{(x\ln x)^2}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)==\frac{-3}{4}+0-0+0=\frac{-3}{4}$$

بما أن F متصلة يمين الصفر حسب السؤال السابق فإن : $\int_0^1 f(t)dt=-\int_1^0 f(t)dt=-F(0)=-\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=\frac{3}{4}$

<u>التمرين الخامس</u> :

$$\begin{cases}g(x)=\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt & ; x>0\\ g(0)=\ln 2\end{cases}$$

1

أ) ليكن $x>0$ ، لدينا : $e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x} \Rightarrow -2x\le -t\le -x \Rightarrow x\le t\le 2x \Rightarrow t\in[x,2x]$

إذن : $e^{-2x}\le e^{-t}\le e^{-x} \quad (\forall t\in[x,2x]) \quad (\forall x>0)$

ب) حسب السؤال السابق نستنتج أن : $\frac{e^{-2x}}{t}\le\frac{e^{-t}}{t}\le\frac{e^{-x}}{t} \quad (\forall t\in[x,2x]) \quad (\forall x>0)$

منه : $\int_x^{2x}\frac{e^{-2x}}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-x}}{t}dt \quad (\forall x>0)$

منه: $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt \le g(x)\le e^{-x}\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt$ أي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}[\ln t]_x^{2x}\le g(x)\le e^{-x}[\ln t]_x^{2x}$

منه : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}(\ln 2x-\ln x)\le g(x)\le e^{-x}(\ln 2x-\ln x)$

بالتالي : $(\forall x>0)\quad e^{-2x}\ln 2\le g(x)\le e^{-x}\ln 2$

ج) بما أن $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-x}\ln 2=\ln 2$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} e^{-2x}\ln 2=\ln 2$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)=\ln 2=g(0)$ ، إذن g متصلة يمين 0

2 بما أن الدالة $t\mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ متصلة على $]0;+\infty[$ فهي تقبل دالة أصلية G متصلة و قابلة للاشتقاق على هذا المجال، ولدينا ، لكل $x>0$: $g(x)=G(2x)-G(x)$ ، وبما أن $x\mapsto 2x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ فإن الدالة g قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$ و لدينا :

$$\forall x>0\qquad g'(x)=2G'(2x)-G'(x)=2\frac{e^{-2x}}{2x}-\frac{e^{-x}}{x}=\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$$

3 أ) ليكن $t>0$ ، الدالة $p:x\mapsto e^{-x}$ متصلة على $[0,t]$ و قابلة للاشتقاق على $]0,t[$ (لأنها متصلة و قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$)، إذن حسب مبرهنة التزايدات المنتهية :

$$\exists c_t\in\,]0,t[\qquad \frac{p(t)-p(0)}{t}=p'(c_t)$$

ولدينا : $\forall x>0\ \ p'(x)=-e^{-x}$ ، منه : $\exists c_t\in\,]0,t[\qquad \frac{e^{-t}-1}{t}=-e^{-c_t}$

ولدينا : $c_t\in\,]0,t[\ \Rightarrow\ 0<c_t<t\ \Rightarrow\ -t<-c_t<0\ \Rightarrow\ e^{-t}<e^{-c_t}<1\ \Rightarrow\ -1<-e^{-c_t}<-e^{-t}$

منه : $-1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$

بالتالي : $\forall t>0\quad -1<\frac{e^{-t}-1}{t}<-e^{-t}$ أو أيضا : $\forall t>0\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$

ب) لدينا : $\forall t>0\quad -1\le\frac{e^{-t}-1}{t}\le -e^{-t}$ منه : $\forall x>0\quad \int_x^{2x}-1\,dt\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}-1}{t}dt\le\int_x^{2x}-e^{-t}\,dt$

منه : $\forall x>0\quad [-t]_x^{2x}\le\int_x^{2x}\frac{e^{-t}}{t}dt-\int_x^{2x}\frac{1}{t}dt\le[e^{-t}]_x^{2x}$

منه : $\forall x>0\quad -2x+x\le g(x)-\ln 2\le e^{-2x}-e^{-x}$

بالتالي : $\forall x>0\quad -1\le\frac{g(x)-\ln 2}{x}\le\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}$

ج) بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{e^{-2x}-1}{x}-\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}-2\,\frac{e^{-2x}-1}{-2x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}=-2\times 1+1=-1$

و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}-1=-1$ ، فإن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-\ln 2}{x}=-1$ أي : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{g(x)-g(0)}{x}=-1$ ، ما يعني أن g قابلة للاشتقاق يمين الصفر.