

الثانية علوم رياضية

تصحيح الامتحان الوطني 2017

التمرين الأول : (3,5 ن)

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ نذكر أن } (M_3(\mathbb{R}), +, \times) \text{ حلقة واحدة صفرها المصفوفة}$$

$$\text{و وحدتها المصفوفة } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و أن } (\mathbb{C}, +, \times) \text{ جسم تبادلي .}$$

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix}, \text{ لكل } (a,b) \text{ من } \mathbb{R}^2 \text{ نضع } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{نعتبر المجموعة } E = \{M(a,b) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$1- \text{ بين أن } E \text{ زمرة جزئية للزمرة } (M_3(\mathbb{R}), +) \quad 0,5$$

$$2- \text{ نعرف على } M_3(\mathbb{R}) \text{ قانون التركيب الداخلي "T" بما يلي :} \quad 0,5$$

$$(\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4) \quad M(a,b)TM(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$$

$$\text{تحقق أن } E \text{ جزء مستقر من } (M_3(\mathbb{R}), T)$$

$$3- \text{ ليكن } \varphi \text{ التطبيق من } \mathbb{C}^* \text{ نحو } E \text{ الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم } a + ib \text{ (حيث : } (a,b) \in \mathbb{R}^2 \text{ بالمصفوفة } M(a,b) \text{ من } E$$

$$\text{أ) تحقق من أن } \varphi \text{ تشاكل من } (\mathbb{C}^*, \times) \text{ نحو } (E, T) \text{ وأن } \varphi(\mathbb{C}^*) = E^* \text{ حيث : } E^* = E \setminus \{M(0,0)\} \quad 0,75$$

$$\text{ب) استنتج أن } (E^*, T) \text{ زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد } J \quad 0,75$$

$$4- \text{ أ) بين أن قانون التركيب الداخلي "T" توزيعي بالنسبة لقانون التركيب الداخلي "+" في } E \quad 0,5$$

$$\text{ب) استنتج أن } (E, +, T) \text{ جسم تبادلي} \quad 0,5$$

التمرين الثاني : (3,5 ن)

ليكن m عددا عقديا غير منعدم.

الجزء الأول :

$$\text{نعتبر في المجموعة } \mathbb{C} \text{ المعادلة : } (E) : 2z^2 - 2(m+1+i)z + m^2 + (1+i)m + i = 0$$

1- تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta = (2im)^2$	0,5
2- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة (E)	0,5
الجزء الثاني: المستوى منسوب إلى معلم متعامد منظم و مباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$	
نفترض أن $m \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1, i\}$ و نضع : $z_1 = \frac{1+i}{2}(m+1)$ و $z_2 = \frac{1-i}{2}(m+i)$	
نعتبر النقط A و B و M و M_1 و M_2 التي أحاقها على التوالي 1 و i و m و z_1 و z_2	
1- أ) تحقق أن : $z_1 = iz_2 + 1$	0,25
ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران الذي مركزه النقطة Ω ذات اللوح $\omega = \frac{1+i}{2}$ و قياس زاويته $\frac{\pi}{2}$	0,5
2- أ) تحقق من أن : $\frac{z_2 - m}{z_1 - m} = i \frac{m - 1}{m - i}$	0,5
ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها [AB]	0,5
ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة . (لاحظ أن $\frac{z_1 - \omega}{z_2 - \omega} = i$)	0,75

التمرين الثالث : (3 ن)

نقبل أن 2017 عدد أولي و أن $2016 = 2^5 3^2 7$	
ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5	
1- ليكن الزوج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث : $px + y^{p-1} = 2017$	
أ) تحقق أن : $p < 2017$	0,25
ب) بين أن : p لا يقسم y	0,5
ج) بين أن $y^{p-1} \equiv 1 [p]$ ثم استنتج أن p يقسم 2016	0,75
د) بين أن : $p = 7$	0,5
2- حدد ، حسب قيم p ، الأزواج (x, y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ التي تحقق : $px + y^{p-1} = 2017$	1

التمرين الرابع : (10 ن)

الجزء الأول: نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :	
$(\forall x \in]0, +\infty[) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$ و $f(0) = 0$	
ليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) (نأخذ $\ \vec{i}\ = \ \vec{j}\ = 2cm$)	
1- أ) بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0	0,25
ب) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,5

ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$	0,5
2- أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها . ب) اعط جدول تغيرات الدالة f	0,5 0,25
3- أ) بين أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها . ب) أرسم المنحنى (C) . (نأخذ $f(1) \simeq 0,7$ و $4e^{-3} \simeq 0,2$)	0,75 0,5
الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = \int_x^1 f(t) dt$	
1- بين أن الدالة F متصلة على المجال $]0, +\infty[$	0,25
2- أ) باستعمال طريقة الكاملة بالأجزاء بين أن : $(\forall x \in]0, +\infty[) \int_x^1 e^{\frac{1}{t}} dt = e^{-1} - xe^{-\frac{1}{x}} - \int_x^1 \frac{1}{t} e^{-\frac{1}{t}} dt$	0,5
ب) حدد $\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}} dt$ لكل x من المجال $]0, +\infty[$	0,25
ج) بين أن : $\int_0^1 f(x) dx = e^{-1}$	0,5
3- أحسب بالسنتيمتر مربع (cm^2) مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى (C) و المستقيمت ذات المعادلات : $y = 0$ و $x = 2$ و $x = 0$	0,5
4- نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n = F(n) - F(n+2)$	
أ) باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية ، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n, n+2[$ بحيث : $u_n = 2 \left(1 + \frac{1}{v_n}\right) e^{-\frac{1}{v_n}}$	0,5
ب) بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad 2 \left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-\frac{1}{n}} \leq u_n \leq 2 \left(1 + \frac{1}{n+2}\right) e^{-\frac{1}{n+2}}$	0,25
ج) استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$	0,25
الجزء الثالث :	
1- أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعاً وحيد a_n بحيث : $f(a_n) = e^{-\frac{1}{n}}$	0,5
ب) بين أن المتتالية $(a_n)_{n \geq 1}$ تزايدية	0,25
ج) تحقق أن : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad -\frac{1}{a_n} + \ln\left(1 + \frac{1}{a_n}\right) = -\frac{1}{n}$	0,25
2- أ) بين أن : $(\forall t \in [0, +\infty[) \quad 1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$	0,25
ب) بين أن : $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad -\frac{x^2}{2} \leq -x + \ln(1+x) \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$	0,5

3- ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4

(أ) تحقق أن $a_4 \geq 1$ ثم استنتج أن : $a_n \geq 1$ (نقبل أن : $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$)	0,5
(ب) بين أن : $1 - \frac{2}{3a_n} \leq \frac{2a_n^2}{n} \leq 1$ (يمكنك استعمال السؤالين 1-ج) و 2-ب) من الجزء الثالث)	0,5
(ج) بين أن : $\sqrt{\frac{n}{6}} \leq a_n$ (يمكنك استعمال السؤالين 3-أ) و 3-ب)) ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$	0,5
(د) حدد : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \sqrt{\frac{2}{n}}$	0,5