

الثانية علوم رياضية الوطني الاستدراكي 2017

التمرين 1 : 4,5 ن

نذكر أن $(\mathbb{C}, +, \times)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي وأن $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة واحدة غير تبادلية و غير كاملة .

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ و $M_{x,y} = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix}$ لكل x, y من \mathbb{R}^2 و $E = \{ M_{x,y} / x, y \in \mathbb{R}^2 \}$

1. بين أن E فضاء متجهي جزئي من $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ بعده 2 0,75

2. (أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}), \times)$ 0,5

(ب) بين أن $(E, +, \times)$ حلقة واحدة و تبادلية 0,75

3. نضع $E^* = E \setminus \{0\}$ و نعتبر التطبيق φ من \mathbb{C}^* نحو E^* المعرف بما يلي :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad \varphi(x+iy) = M\left(x, \frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

(أ) بين أن φ تشاكل تقابلي من (\mathbb{C}^*, \times) نحو (E^*, \times) 0,75

(ب) استنتج أن (E^*, \times) زمرة تبادلية . 0,5

(ج) بين أن : $J^{2017} = \varphi(3^{1008}\sqrt{3}i)$ ثم حدد مقلوب المصفوفة J^{2017} في (E^*, \times) 0,75

4. بين أن $(E, +, \times)$ جسم تبادلي. 0,5

التمرين 2 : 3 ن

يحتوي كيس على $2n$ كرة (n من \mathbb{N}^*) ، منها n كرة بيضاء و n كرة سوداء. جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس.

تقتضي لعبة سحب كرة واحدة من الكيس و تسجيل لونها و إعادتها إلى الكيس ثم سحب كرة أخرى من نفس الكيس و تسجيل لونها كذلك .
قانون اللعبة هو كما يلي :

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أبيض ، نربح 20 نقطة

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أسود ، نخسر 20 نقطة

- إذا كانت الكرتان المسحوبتان مختلفتي اللون ، يكون الربح منعدم .

1. أحسب احتمال ربح 20 نقطة و احتمال خسارة 20 نقطة و احتمال تحقيق ربح منعدم 0,75

2. نعيد اللعبة السابقة خمس مرات

(أ) أحسب احتمال ربح 100 نقطة 0,5

(ب) أحسب احتمال ربح 40 نقطة 1

3. خلال لعبة واحدة ، نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ فقط القيم -20 عند الخسارة و 0 عندما يكون

الربح منعدما و +20 عند الربح	
(أ) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X	0,5
(ب) أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X	0,25

التمرين 3 : 2,5 ن

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر O, \vec{e}_1, \vec{e}_2	
لتكن M نقطة لحقها العدد العقدي غير المنعدم z و M' النقطة التي لحقها $z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	
1. حدد العدد العقدي z لكي تكون النقطتان M و M' منطبقتين .	0,5
2. نفترض أن M تخالف النقطتين A و B لحقيهما على التوالي 1 و -1	
بين أن : $\frac{z'+1}{z'-1} = \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^2$	0,5
3. ليكن Δ واسط القطعة AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Δ فإن M' تنتمي إلى Δ	0,75
4. لتكن Γ الدائرة التي أحد أقطارها AB	
بين أن : إذا كانت M تنتمي إلى Γ فإن M' تنتمي إلى المستقيم AB	0,75

التمرين 4 : 10 ن

الجزء الأول :	
لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :	
$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) = \frac{\text{Arc tan } x}{x}$ و $f(0) = 1$	
1. بين أن f متصلة على المجال I	0,5
2. (أ) ليكن x من I بين أن : $\forall t \in 0, x \quad \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$	0,5
(ب) بين أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arc tan } x \leq x$	0,5
(ج) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75
3. (أ) علما أن f قابلة للاشتقاق على المجال $0, +\infty$ ، أحسب $f'(x)$ لكل x من $0, +\infty$	0,5
(ب) أدرس تغيرات الدالة f على المجال I	0,25

الجزء الثاني :	
لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I = 0, +\infty$ بما يلي :	
$\forall x \in 0, +\infty \quad g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$ و $g(0) = 1$	
1. (أ) بين أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) \leq g(x) \leq 1$	0,5
(ب) بين g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0	0,75

2. بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $0, +\infty$	0,75
و أن $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) = \frac{1}{x} f(x) - g(x)$	
3. بين أن الدالة g تناقصية على المجال I	0,25
4. (أ) بين أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(t) dt = 0$ (لاحظ أن : $0 < \text{Arctan } x < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in 0, +\infty$)	0,75
(ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$	0,5

<u>الجزء الثالث :</u>	
1. بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $0,1$	0,75
2. (أ) تحقق أن : $\forall x \in 0, +\infty \quad 0 \leq 1 - f(x) \leq \frac{x^2}{1+x^2}$	0,5
(ب) بين أن $\forall x \in 0, +\infty \quad g'(x) \leq \frac{1}{2}$	0,75
3. لتكن u_n المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ و $u_{n+1} = g(u_n)$ لكل n من \mathbb{N}	0,75
(أ) بين أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - \alpha \leq \frac{1}{2} u_n - \alpha $	0,75
(ب) بين أن المتتالية u_n متقاربة	0,75