



4	مدة الإنجاز	الرياضيات	المادة
9	المعامل	شعبة العلوم الرياضية : "أ" و "ب"	الشعبة أو المسلك

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها.
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين 1 يتعلق بالبنيات الجبرية.....(3.5 ن)
- التمرين 2 يتعلق بالحسابيات.....(3 ن)
- التمرين 3 يتعلق بالأعداد العقدية.....(3.5 ن)
- التمرين 4 يتعلق بالتحليل.....(7.5 ن)
- التمرين 5 يتعلق بالتحليل.....(2.5 ن)

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين 1: (3.5 نقطة)

نذكر أن $(\mathcal{E}, +, \cdot)$ جسم تبادلي وأن $(M_2(i), +, \cdot)$ حلقة واحدة، صفرها المصفوفة المنعدمة $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن $(M_2(i), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي .

لكل زوج (x, y) من \mathbb{C}^2 نضع $M(x, y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ x+y & x+2y \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة $E = \{M(x, y) / (x, y) \in \mathbb{C}^2\}$

1- بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(i), +)$ 0.25

2- أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(M_2(i), +, \cdot)$ 0.25

ب) نضع $J = M(0, 1)$. بين أن (I, J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E, +, \cdot)$ 0.5

3- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(i), \cdot)$ 0.5

ب) بين أن $(E, +, \cdot)$ حلقة تبادلية. 0.5

4- ليكن J التطبيق من \mathcal{E}^* نحو $M_2(i)$ المعرف بما يلي:

$$J(x+iy) = M(x+y, -y) = \begin{pmatrix} x+y & -2y \\ x-y & x-y \end{pmatrix} ; J^{-1}(\{(0,0)\}) = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2\}$$

أ) بين أن J تشاكل من (\mathcal{E}^*, \cdot) نحو $(M_2(i), \cdot)$ 0.5

ب) نضع $E^* = E - \{O\}$. بين أن $E^* = \mathcal{E}^*$ 0.5

ج) استنتج أن (E^*, \cdot) زمرة تبادلية. 0.25

5- بين أن $(E, +, \cdot)$ جسم تبادلي. 0.25

التمرين 2: (3 نقط)

ليكن p عددا أوليا بحيث: $p = 3 + 4k$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

1- بين أن لكل عدد صحيح نسبي x ، إذا كان $x^2 \equiv 1 [p]$ فإن $x^{p-5} \equiv 1 [p]$ 0.5

2- ليكن x عددا صحيحا نسبيا يحقق: $x^{p-5} \equiv 1 [p]$

أ) بين أن x و p أوليان فيما بينهما. 0.5

ب) بين أن: $x^{p-1} \equiv 1 [p]$ 0.5

ج) تحقق أن: $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$ 0.5

د) استنتج أن: $x^2 \equiv 1 [p]$ 0.5

3- حل في \mathbb{Z} المعادلة: $x^{62} \equiv 1 [67]$ 0.5

التمرين 3: (3.5 نقطة)ليكن m عددا عقديا.I- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \square المعادلة (E_m) ذات المجهول z :

$$z^2 + (im + 2)z + im + 2 - m = 0$$

1- أ) تحقق أن $\Delta = (im - 2i)^2$ هو مميز المعادلة (E_m) 0,25ب) إعط حسب قيم العدد m مجموعة حلول المعادلة (E_m) 0,52- من أجل $m = i\sqrt{2}$ ، اكتب حل المعادلة (E_m) على الشكل الأسّي. 0,5II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و Ω و M و M' ذات الألفاق على التوالي $a = -1 - i$ و $\omega = i$ و m و $m' = -im - 1 + i$ 1- ليكن R الدوران الذي زاويته $-\frac{\pi}{2}$ و يحول M إلى M' .أ) تحقق أن Ω هو مركز الدوران R 0,25ب) حدد b لحق النقطة B التي تحقق: $A = R(B)$ 0,52- أ) تحقق أن: $m' - a = \frac{\omega - a}{\omega - b}(m - b)$ 0,5ب) استنتج أن النقط A و M و M' تكون مستقيمة إذا و فقط إذا كانت النقط A و B و Ω و M متداورة. 0,5ج) بين أن مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و M و M' مستقيمة هي دائرة يجب تحديد مركزها و شعاعها. 0,5**التمرين 4: (7.5 نقطة)****الجزء I:**1- أ) بين أن: $\int_0^x \frac{t}{1+t} dt = x - \ln(1+x)$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0,5ب) باستعمال تغيير المتغير: $u = t^2$ بين أن:
$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; \int_0^x \frac{t}{1+t} dt = \frac{1}{2} \int_0^{x^2} \frac{1}{1+\sqrt{u}} du$$
 0,5
ج) استنتج أن: $\frac{1}{2(1+x)} \leq \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ 0,52- حدد: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$ 0,25

الجزء II :

$$\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x) ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي:

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

0.25 1- أ) بين أن f متصلة على اليمين في 0

0.5 ب) بين أن f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 (يمكن استعمال نتيجة السؤال I-2).

0.75 ج) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0.5 2- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ ثم تحقق أن:

$$(\forall x \in]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{x - \ln(1+x)}{x^2}$$

0.25 ب) استنتج أن f تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

0.25 ج) تحقق أن: $f([0, +\infty[) = [1, +\infty[$

0.5 3- مثل مبيانيا المنحنى (C) (يتم إنشاء نصف المماس على اليمين في النقطة ذات الأفصول 0).

الجزء III :

1- نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي: $g(x) = f(x) - x$

0.5 أ) بين أن: $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$

0.5 ب) استنتج أن الدالة g تناقصية قطعاً على $]0, +\infty[$ ثم بين أن: $g([0, +\infty[) =]-\infty, 1[$

0.25 ج) بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلاً وحيداً α على المجال $]0, +\infty[$

2- ليكن a عدداً حقيقياً من المجال $]0, +\infty[$

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $u_0 = a$ و $u_{n+1} = f(u_n)$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.25 أ) بين أن: $u_n > 0$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 ب) بين أن: $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.5 ج) بين بالترجع أن: $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \alpha|$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

0.25 د) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تؤول إلى α

التمرين 5: (2.5 نقطة)

نعتبر الدالة F المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$

1- بين أن F متصلة و تزايدية قطعاً على \mathbb{R} 0.5

2- (أ) بين أن: $F(x) \geq x$; $(\forall x \in]0, +\infty[)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0.5

(ب) بين أن F فردية ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$ 0.5

(ج) بين أن F تقابل من \mathbb{R} نحو \mathbb{R} 0.5

(د) بين أن دالة التقابل العكسي G للدالة F قابلة للاشتقاق في 0 ثم احسب $G'(0)$ 0.5

انتهى