

الصفحة	2	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
5			

1-2 استنتج من الأسئلة السابقة أن المعادلة (D) لا تقبل حلا في $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

التمرين 2: (3.5 نقطة/اختياري) (إذا اخترت إنجاز التمرين 2 فلا تنجز التمرين 1)

نرمز بالرمز $(M_2(i), +, \cdot)$ لمجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة الثانية.

نذكر أن $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ حلقة غير تبادلية وواحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ وأن (i, \cdot) زمرة تبادلية.

نعتبر المجموعة الجزئية E من $(M_2(i), +, \cdot)$ المعرفة بما يلي:

0.5 1- أ) بين أن E جزء مستقر من $(M_2(i), +, \cdot)$

0.5 ب) بين أن الضرب غير تبادلي في E

0.5 ج) تحقق أن: $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 & 0 \\ xy & 0 \end{pmatrix}$

0.5 2- بين أن $(E, +, \cdot)$ زمرة غير تبادلية.

3- نعتبر المجموعة الجزئية F من E المعرفة بما يلي:

0.5 أ) بين أن التطبيق j المعرفة بما يلي: $j(x) = M(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$; $j(x) = M(x)$ تشاكل من (i, \cdot) نحو (E, \cdot)

1 ب) استنتج أن $(F, +, \cdot)$ زمرة تبادلية يجب تحديد عنصرها المحايد.

التمرين 3: (3.5 نقط/اجباري)

ليكن m عدد عقدي غير منعدم.

الجزء الأول:

نعتبر في المجموعة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z ، $z^3 - 2mz^2 + 2m^2z - m^3 = 0$ (E)

0.5 1- حل في \mathbb{C} المعادلة (E) (لاحظ أن m حلا للمعادلة (E))

2- ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) المخالفين للحل m

0.25 أ) تحقق أن: $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{m}$

0.5 ب) في حالة: $m = 1 + e^{i\frac{p}{3}}$ ، أكتب على الشكل الجبري z_1 و z_2

الجزء الثاني:

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O; u, v)$

نعتبر النقط A و B ذات الألفاق على التوالي: $a = m e^{i\frac{p}{3}}$ و $b = m e^{-i\frac{p}{3}}$

ليكن P مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول O إلى A

و Q مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول A إلى B

و R مركز الدوران الذي زاويته $\frac{\pi p}{2\theta}$ و يحول B إلى O

0.25 1- بين أن النقط O و A و B غير مستقيمة.

1 2- أ) بين أن لحق P هو: $p = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{7p}{12}}$ وأن لحق R هو: $r = m \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{7p}{12}}$

0.5 ب) بين أن لحق Q هو: $q = m \sqrt{2} \sin \frac{\pi p}{12}$

0.5 3- بين أن $OQ = PR$ و أن المستقيمين (OQ) و (PR) متعامدان.

التمرين 4: (13 نقطة/إجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I = [0; +\infty[$ بما يلي:

$$f(x) = x^3 \ln \frac{x}{1} + \frac{1}{x}, \quad x \in]0; +\infty[\text{ و } f(0) = 0$$

و ليكن (C) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(O; i, j)$ (نأخذ: $\|i\| = \|j\| = 1 \text{ cm}$)

0.5 1- بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على الدالة $\ln(t)$ ا t في المجال $[x, x+1]$ ، بين أن:

$$(P) \quad (x \in]0; +\infty[) ; \quad \frac{1}{x+1} < \ln \frac{x}{1} + \frac{1}{x} < \frac{1}{x}$$

0.5 2- أ) باستعمال العبارة (P) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0

0.5 ب) باستعمال العبارة (P) بين أن المنحنى (C) يقبل فرعا شلجيميا يتم تحديد اتجاهه.

الصفحة	4	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع - مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)
5			

0.75 3- (أ) بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]p; +\infty[$ وأن :

$$f'(x) = 3x^2 \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{3(1+x)^2} \quad (x \in]p; +\infty[)$$

0.5 (ب) استنتج أن الدالة f تزايدية قطعاً على I (يمكن استعمال العبارة (P))

0.25 (ب) اعط جدول تغيرات f

4- لكل x من المجال $]p; +\infty[$ نضع: $g(x) = \frac{f(x)}{x}$

0.75 (أ) تحقق أن: $g'(x) = 2x \ln(1+x) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2(1+x)^2} \quad (x \in]p; +\infty[)$

ثم استنتج أن الدالة g تزايدية قطعاً على i_+ *

0.5 (ب) بين أن المعادلة $g(x) = 1$ تقبل على i_+ * ، حلاً وحيداً نرسم إليه بالرمز a

ثم تحقق أن a ينتمي إلى المجال $]2; 3[$ (نأخذ: $\ln 2 = 0.7$ و $\ln \frac{3}{2} = 1.5$)

0.5 (د) استنتج أن الحلول الوحيدة للمعادلة $f(x) = x$ هي: 0 و a

0.5 5- (أ) مثل مبيانيا المنحنى (C)

(حدد نصف المماس على اليمين في النقطة O و الفرع الشلجي للمنحنى (C))

0.25 (ب) بين أن الدالة f تقابل من I نحو I (نرمز بالرمز f^{-1} لتقابلها العكسي)

الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة بما يلي: $0 < u_0 < a$ و لكل n من \mathbb{N} ، $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$

0.5 1- بين بالترجع أن: $0 < u_n < a \quad (n \in \mathbb{N})$

0.5 2- (أ) بين أن: $g(p; a) =]p; 1[$

0.5 (ب) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ تزايدية قطعاً.

0.25 (ج) بين أن المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة.

0.5 3- حدد $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

الجزء الثالث:

نعتبر الدالة F المعرفة على المجال I بما يلي: $F(x) = \int_x^1 f(t) dt \quad (x \in I)$

الصفحة	NS 24	الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا - الدورة العادية 2020 - الموضوع	
5		- مادة: الرياضيات- شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	

1- أدرس حسب قيم x ، إشارة $F(x)$ 0.5

(ب) بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على I و حدد مشتقتها الأولى F' 0.5

(ج) استنتج أن F تناقصية قطعاً على I 0.25

2- أ) بين أن: $F(x) \leq (1-x) \ln 2$; $x \in [1; +\infty[$ 0.5

(ب) استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ 0.25

3- أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: 0.5

$$F(x) = \frac{\ln 2}{4} - \frac{x^4}{4} \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x} + \frac{1}{4} \int_{x}^{1} \frac{t^3}{t+1} dt$$

(ب) أحسب $\int_{x}^{1} \frac{t^3}{t+1} dt$ لكل $x \in]-\infty; +\infty[$ (لاحظ أن: $\frac{t^3}{1+t} = t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}$) 0.5

(ج) استنتج أن: $F(x) = \frac{5}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} \ln(1+x) - \frac{x^4}{4} \ln \frac{x}{1+x} + \frac{1}{x}$ 0.5

(د) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة: $\int_0^1 f(t) dt$ 0.5

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)}{2n} \quad n \text{ منعدم طبيعي غير منعدم } n \text{ نضع:}$$

أ) بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n من \mathbb{N}^* و لكل عدد صحيح طبيعي k من $\{0, 1, \dots, n-1\}$: 0.5

$$-\frac{1}{2n} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) \leq F\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - F\left(\frac{2k}{2n}\right) \leq \frac{1}{2n} f\left(\frac{2k}{2n}\right)$$

(ب) استنتج أن: $-\frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n}\right) \leq v_n \leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k}{2n}\right)$ 0.5

$$\left(\frac{2k+1}{2n} < \frac{k+1}{n} \right) \text{ (لاحظ أن:)}$$

(ج)- بين أن المتتالية العددية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ متقاربة ثم حدد نهايتها. 0.25

انتهى