المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية
والتكوين المهني
والتعليم العالي والبحث العلمي
ⵜⴰⴳⵍⴷⵉⵜ ⵏ ⵍⵎⵖⵔⵉⴱ
المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2020

- الموضوع –

SSSSSSSSSSSSSSSSSSSS | RS 24

المادة	الرياضيات	مدة الإنجاز	4
الشعبة أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)	المعامل	9

- المدة الزمنية لإنجاز الموضوع هي 4 ساعات.
- يتكون الموضوع من (4) صفحات مرقمة من 1/4 إلى 4/4
- يتكون الموضوع من أربعة تمارين مستقلة فيما بينها.
- **المترشح ملزم بانجاز التمرين3 و التمرين4 و الاختيار بين انجاز إما التمرين1 و إما التمرين2**
- **على المترشح أن ينجز في المجموع ثلاثة (3) تمارين:**

- **التمرين1** و يتعلق بالحسابيات **(اختياري)..3.5 نقط**
  و إما
  التمرين2 ويتعلق بالبنيات الجبرية **(اختياري)..................................3.5 نقط**

- **التمرين3** و يتعلق بالأعداد العقدية **(إجباري).......................................3.5 نقط**

- **التمرين4** و يتعلق بالتحليل **(إجباري)..13 نقطة**

لا يسمح باستعمال الآلة الحاسبة كيفما كان نوعها

اختر وأنجز إما التمرين1 وإما التمرين2

و أنجز إجباريا التمرين3 و التمرين4

التمرين 1:(3.5 نقط/اختياري) **(إذا انجزت التمرين1 فلا ينبغي لك أن تنجز التمرين2)**

ليكن p و q عددين أوليين يحققان : $p<q$ و $9^{p+q-1} \equiv 1\ [pq]$

0.5 1- أ) بين أن p و 9 أوليان فيما بينهما.

1 ب) استنتج أن: $9^{p-1} \equiv 1\ [p]$ و أن $9^{q} \equiv 1\ [p]$

0.5 2- أ) بين أن $p-1$ و q أوليان فيما بينهما .

0.5 ب) باستعمال مبرهنة بوزو ، بين أن: $p=2$

0.5 3- أ) باستعمال مبرهنة فيرما ، بين أن : $9^{q-1} \equiv 1\ [q]$

0,5 ب) استنتج أن: $q=5$

التمرين 2: (3.5 نقط/اختياري) (إذا انجزت التمرين2 فلا ينبغي لك أن تنجز التمرين1)

نرمز بالرمز $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ إلى مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 3 ذات معاملات حقيقية.

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 9 و أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة غير تبادلية و واحدية

صفرها $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ و وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة الجزئية: $E=\left\{M(x,y,z)=\begin{pmatrix}x&-y&-y\\0&z&0\\y&x-z&x\end{pmatrix}\ /\ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\right\}$

الجزء الأول:

1-أ) بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ 0.25

ب) حدد أساسا للفضاء $(E,+,\cdot)$ 0.5

2-أ) تحقق أن:

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\forall (x',y',z')\in\mathbb{R}^3\ ;\ M(x,y,z)\times M(x',y',z')=M(xx'-yy',xy'+yx',zz')$$ 0.25

ب) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية 0.5

الجزء الثاني:

نعتبر المجموعة الجزئية F من E للمصفوفات على الشكل $M(x,y,0)$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

1– بين أن F زمرة جزئية للزمرة $(E,+)$ 0.25

2- ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو E بما يلي:

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\quad ;\quad \varphi(x+iy)=M(x,y,0)$$

أ- بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$ 0.25

ب- استنتج أن $(F^*,\times)$ زمرة تبادلية. $(F^*=F-\{O\})$ 0.5

ج- بين أن $(F,+,\times)$ جسم تبادلي يتم تحديد وحدته. 0.5

3- أ) تحقق أن: $M(x,y,0)\times\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=O\quad ;\quad (\forall M(x,y,0)\in F)$ 0.25

ب) استنتج أن لا أحد من عناصر المجموعة الجزئية F يقبل مقلوبا بالنسبة للضرب في $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ 0.25

التمرين 3: (3.5 نقط/اجباري)

I- ليكن m عددا حقيقيا غير منعدم.

نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$، المعادلتين:

$$(E): z^2+2z+1+m^2=0 \quad \text{و} \quad (F): z^3+2(1-i)z^2+\left(1+m^2-4i\right)z-2i\left(1+m^2\right)=0$$

1- حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E) 0.5

2- أ) بين أن المعادلة (F) تقبل حلا تخيليا صرفا يتم تحديده. 0.25

ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (F) 0.5

II- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O;\vec{u},\vec{v})$

نعتبر النقطتين: $A(-1+im)$ و $B(-1-im)$

لتكن Ω منتصف القطعة $[AB]$ و A' منتصف القطعة $[OB]$ و B' منتصف القطعة $[OA]$

الدوران الذي مركزه Ω و زاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ يحول A إلى $P(p)$ و الدوران الذي مركزه A' و زاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ يحول B إلى $Q(q)$ و الدوران الذي مركزه B' و زاويته $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ يحول O إلى $R(r)$

1- بين أن: $p=-1+m$ و $q=\frac{1-i}{2}(-1-im)$ و $r=\overline{q}$ 1.5

2- أ) تحقق أن: $q-r=-ip$ 0.25

ب) استنتج أن: $OP=QR$ و أن المستقيمين (OP) و (QR) متعامدان. 0.5

التمرين 4: (13 نقطة/اجباري)

الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=[0,1]$ بما يلي: $f(x)=x\ln(2-x)$

و ليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i},\vec{j})$

1- أ) بين أن f قابلة للاشتقاق على I و أن: $\forall x\in I \ ; \quad f'(x)=\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$ 0.75

ب) بين أن الدالة المشتقة f' تناقصية قطعا على I 0.5

ج) بين أنه يوجد عدد حقيقي وحيد $\alpha\in\,]0;1[$ بحيث: $f'(\alpha)=0$ و أن: $f(\alpha)=\frac{\alpha^2}{2-\alpha}$ 0.75

2- أ) ادرس تغيرات f ، ثم اعط جدول تغيراتها. 0.75

ب) بين أن المنحنى (C) مقعر. 0.5

ج) بين أن: $(\forall t\in I),\ (\forall x\in I);\quad f(x)\le f'(t)(x-t)+f(t)$ 0.5

د) استنتج أن لكل x من I: $f(x)\le x\ln 2$ و $f(x)\le -x+1$ 0.5

3- أنشئ المنحنى (C) (نأخذ: $\|\vec{i}\|=2cm$) 0.5

-4 احسب، ب cm^2 ، مساحة جزء المستوى المحصور بالمنحنى و المستقيمات المعرفة بالمعادلات: $x=0$ و $x=1$ و $y=0$ 0.75

الجزء الثاني:

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2.

نعتبر الدالة f_n المعرفة على $I=[0,1]$ بما يلي: $f_n(x)=x^n\ln(2-x)$

1-أ) تحقق أن f_n موجبة على I و أن $f_n(0)=f_n(1)$ 0.5

ب) بين أنه يوجد على الأقل $\alpha_n\in]0,1[$ بحيث: $f_n'(\alpha_n)=0$ 0.5

2- أ) بين أن f_n قابلة للاشتقاق على I و أن: $f_n'(x)=x^{n-1}g_n(x)$; $\forall x\in I$ حيث: 0.75

$$g_n(x)=n\ln(2-x)-\frac{x}{2-x}$$

ب) بين أن الدالة g_n تناقصية قطعا على I 0.5

ج) استنتج أن α_n وحيد. 0.5

3- نعتبر المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ المعرفة حسب ما سبق.

أ) بين أن: $f_n(\alpha_n)=\frac{1}{n}\cdot\frac{\alpha_n^{n+1}}{2-\alpha_n}$; $\forall n\geq 2$ ، استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n)=0$ 1

ب) بين أن: $g_n(\alpha_{n+1})=-\ln(2-\alpha_{n+1})$ $\forall n\geq 2$ ، استنتج أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا. 1

ج) بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ متقاربة. 0.25

د) بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=1$ 0.5

الجزء الثالث:

لكل عدد صحيح طبيعي $n\geq 2$ ، نضع: $I_n=\int_0^1 f_n(x)dx$

1- بين أن المتتالية $(I_n)_{n\geq 2}$ تناقصية، استنتج أنها متقاربة. 0.75

2- باستعمال مكاملة بالأجزاء، بين أن: $I_n=\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{2-x}dx$ 0.5

3- بين أن: $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$; $(\forall n\geq 2)$ ، ثم استنتج أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$ 0.75

انتهى