

I. تكامل دالة f متصلة على قطعة [a, b] :

01. تعريف:

f دالة متصلة على قطعة [a, b] حيث F دالة أصلية ل f .

العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ يسمى تكامل f من a إلى b . و نرسم له ب: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b$
ويقرأ : التكامل من a إلى b ل $f(x) dx$ أو أيضا مجموع $f(x) dx$ من a إلى b .

02. ملحوظة :

- $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$ (أي غير مرتبط باختيار أي دالة أصلية سواء كانت F أو G للدالة f) .
- في الكتابة $\int_a^b f(x) dx$ يمكن تعويض المتغير x بأي متغير و منه : $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(y) dy = \int_a^b f(t) dt = \dots$
- $\int_a^a f(t) dt = [F(t)]_a^a = F(a) - F(a) = 0$

03. تمرين : أحسب : $\int_0^1 \cos x dx$ و $\int_0^1 (x^2 - 2x) dx$ و $\int_2^{1+e} \frac{4}{x-1} dx$ و $\int_0^1 x^2 e^{x^3+4} dx$ و $4 \times \int_1^2 \sqrt[3]{x^2} dx$ و $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{5}{1+x^2} dx$

أجوبة :

- نحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$
- نحسب : $\int_0^1 (x^2 - 2x) dx = \left[\frac{1}{3} x^3 - x^2 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} 1^3 - 1^2 \right) - \left(\frac{1}{3} 0^3 - 0^2 \right) = -\frac{2}{3}$
- نحسب : $\int_2^{1+e} \frac{4}{x-1} dx = [4 \ln |x-1|]_2^{1+e} = 4(\ln e - \ln 1) = 4$
- نحسب : $\int_0^1 x^2 e^{x^3+4} dx = \int_0^1 (x^3 + 4)' e^{x^3+4} dx = [e^{x^3+4}]_0^1 = e^5 - e^4$
- نحسب : $4 \times \int_1^2 \sqrt[3]{x^2} dx = 4 \times \int_1^2 x^{\frac{2}{3}} dx = 4 \times \left[\frac{1}{\frac{2}{3}+1} x^{\frac{2}{3}+1} \right]_1^2 = 4 \times \frac{3}{5} \left(2^{\frac{5}{3}} - 1^{\frac{5}{3}} \right) = \frac{12}{5} \left(\sqrt[3]{2^5} - 1 \right)$
- نحسب : $\int_{-\sqrt{3}}^0 \frac{5}{1+x^2} dx = [5 \times \arctan x]_{-\sqrt{3}}^0 = 5 \times \left(\arctan 0 - \arctan(-\sqrt{3}) \right) = 5 \times \left(0 + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{5\pi}{3}$

II. خاصيات التكامل : علاقة شال - خطانية التكامل - التكامل والترتيب:

01. خاصيات :

1. خاصية :

- f قابلة للاشتقاق على [a, b] و f' متصلة على [a, b] لدينا : $\int_a^b f'(x) dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$
- $c \in \mathbb{R}$ لدينا : $\int_a^b c dx = [cx]_a^b = c(b-a)$

2. خاصيات :

f دالة متصلة على $[a, b]$. لدينا :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^a f(x)dx = 0$$

3. خاصيات : (خطانية التكامل و التكامل و الترتيب)

f و g متصلتين على مجال I مع a و b من I ؛ α و β من \mathbb{R} . لدينا :

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

التكامل و الترتيب: f موجب على $[a, b]$ ؛ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ (منحنى f فوق محور الأفاصيل و $a \leq b$ فإن تكاملها موجب)

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \quad \text{و} \quad \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \text{فإن} \quad \forall x \in [a, b]; f(x) \leq g(x)$$

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)dx \leq M \quad \text{أو} \quad (b-a)m \leq \int_a^b f(x)dx \leq (b-a)M \quad \text{فإن} \quad \forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M$$

4. برهان :

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{نبرهن على :}$$

لتكن F و G دالتين أصليتين ل f و g على $[a, b]$ (لأن f و g متصلتين على $[a, b]$).

F+G دالة أصلية ل f+g .

من جهة أخرى :

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx &= [F(x)]_a^b - [G(x)]_a^b \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= ((F+G)(b)) - ((F+G)(a)) \\ &= \int_a^b (f+g)(x)dx \end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{خلاصة :}$$

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{نبرهن على :}$$

لتكن F دالة أصلية ل f على $[a, b]$ مع $a \leq b$ ومنه $F' = f \geq 0$ (لأن f موجبة على $[a, b]$) و بالتالي F تزايدية على $[a, b]$

لدينا :

$$a \leq b \Rightarrow F(a) \leq F(b) ; (f \nearrow)$$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad \text{خلاصة :}$$

❖ نبرهن على : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ فإن $\forall x \in [a, b]; f(x) \leq g(x)$

❖ نبرهن على : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

• لدينا : $\forall x \in [a, b]; -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ (1)
• لدينا :

$$(1) \Rightarrow -\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

خلاصة : $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$

5. تمرين تطبيقي :

(1) أحسب : $\int_{-3}^2 |2x-4| dx$

(2) نضع : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) dx$ و $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx$

(3) أ - أحسب : $A+B$ و $A-B$. ب - استنتج قيمة كل من A و B .

(4) بين أن : $\int_2^5 \ln(x+1) dx \leq \int_2^5 \ln(x+3) dx$

III دالة معرفة بتكامل :

01. خاصية :

f دالة متصلة على مجال I و $a \in I$.
الدالة العددية F المعرفة بما يلي :

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

هي الدالة الأصلية ل f على I و التي تنعدم في a .

02. مثال :

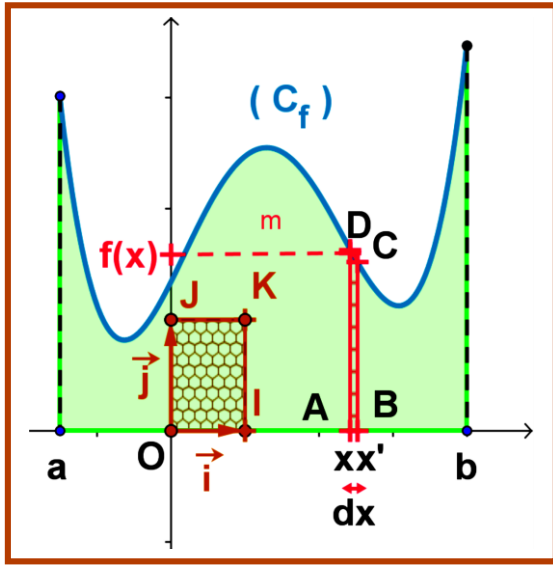
نعتبر الدالة العددية : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$: $\forall x \in]0, +\infty[$. لدينا : $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln|t|]_1^x = \ln|x| - \ln|1| = \ln x$

خلاصة : الدالة F هي الدالة الأصلية ل $f(x) = \frac{1}{x}$ التي تنعدم في 1 .

IV التآويل الهندسي ل $\int_a^b f(x) dx$:

01. تقديم :

- في هذه الفقرة نأخذ المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j})
- f دالة متصلة و موجبة على القطعة $[a, b]$ (أي $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$) .
- نضع : $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ و نعتبر النقطة K حيث $OIKJ$ مستطيل .



• وحدة قياس المساحات هي مساحة المستطيل OIKJ ونرمز لها بالرمز ب :
u.a (u.a = unité aire)

• (C_f) منحنى الدالة f على $[a, b]$. (مع العلم أن (C_f) يوجد فوق محور الأفاصيل لأن $f(x) \geq 0$)

• لنعتبر Δ_f الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = a$ و $x = b$.

• لدينا : $\Delta_f = \{M(x, y) / a \leq x \leq b \text{ و } 0 \leq y \leq f(x)\}$

• لنعتبر \mathcal{A} مساحة الحيز Δ_f من المستوى (P) معبر عنها ب u.a .
نأخذ : $x \in [a, b]$

• على محور الأفاصيل نعتبر العدد x' حيث $x < x'$ و طول القطعة $[x, x']$ هو :
 dx يقارب من 0 (أي $dx \sim 0$) .

ملحوظة: المساحة تحسب بالتكامل ومرتبطة بإشارة الدالة f على $[a, b]$

• $x + dx \sim x$ و بمأن f متصلة $f(x + dx) \sim f(x)$

• نعتبر المستطيل $\Delta_x = ABCD$ حيث $D \begin{pmatrix} x' \\ f(x) \end{pmatrix}$; $C \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix}$; $A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$

• S_x مساحة المستطيل Δ_x هي : $S_x = f(x) \times dx$

• لدينا : مجموع مساحات المستطيلات S_x عندما يتغير x من a إلى b أي $\sum_{x=a}^{x=b} S_x = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx$ وهو يساوي مساحة الحيز Δ_f

ومنه نكتب : $\sum_{x=a}^{x=b} S_x = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx = \int_a^b f(x) \times dx$ ($\times u.a$)

ومنه : $\sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx = \int_a^b f(x) dx$ ($\times u.a$)

خلاصة :

• مجموع مساحات المستطيلات S_x عندما يتغير x من a إلى b أي $\sum_{x=a}^{x=b} S_x = \sum_{x=a}^{x=b} f(x) \times dx$ هو التكامل $\int_a^b f(x) dx$ مضروب في وحدة المساحة u.a .

• $\int_a^b f(x) dx$ ($\times u.a$) هو : مساحة Δ_f الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = a$ و $x = b$.

• مساحة $\Delta_f = \{M(x, y) / a \leq x \leq b \text{ و } 0 \leq y \leq f(x)\}$ هو $\int_a^b f(x) dx$ ($\times u.a$)

02 خاصة :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد (O, \vec{i}, \vec{j}) . f دالة متصلة و موجبة على القطعة $[a, b]$ و (C_f) منحناها .

• \mathcal{A} مساحة Δ_f الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x = a$ و $x = b$ هو $\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx$ ($\times u.a$) .

La valeur moyenne القيمة المتوسطة

01. خاصية و تعريف:

- f متصلة على مجال I مع a و b من I حيث $a < b$.
- يوجد على الأقل عنصر c من المجال $[a, b]$ حيث: $(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx$
- العدد الحقيقي: $f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$ يسمى القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[a, b]$.

02. برهان:

✓ طريق 1:

لدينا:

- $f([a, b]) = [m, M]$ (لأن f متصلة على $[a, b]$)
- $m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq M$ أو $(b-a)m \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)M$ فإن $\forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M$

- نحصل على $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \in [m, M] = f([a, b])$

- بمأن f متصلة على $[a, b]$ و حسب مبرهنة القيم الوسيطة: $\exists c \in [a, b] : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

✓ طريق 2:

- F دالة أصلية ل f على $[a, b]$. (لأن f متصلة على $[a, b]$)
- حسب مبرهن تزايدات المنتهية T.A.F: $\exists c \in]a, b[/ F'(c) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$ ومنه:

$$\exists c \in]a, b[/ f(c) = \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx ; \left(\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \right)$$

$$\exists c \in]a, b[/ f(c) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \text{ : خلاصة}$$

03. مثال:

f متصلة على مجال $[0, 2]$ حيث: حدد القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = 3x$

لدينا:

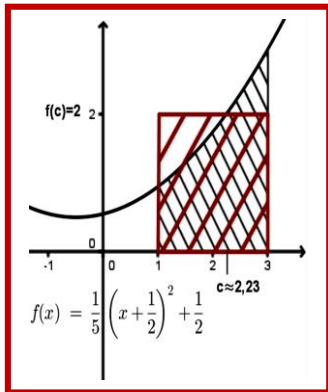
$$f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{2-0} \times \int_0^2 3x dx = \frac{1}{2} \times \left[\frac{3}{2} x^2 \right]_0^2 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} [x^2]_0^2 = 3$$

خلاصة: القيمة المتوسطة للدالة f على مجال $[0, 2]$ هي $f(c) = 3$

$$(b-a) \times f(c) = \int_a^b f(x) dx \text{ أي } f(c) = \frac{1}{b-a} \times \int_a^b f(x) dx$$

04. تأويل الهندسي للنتيجة المحصل عليها:

يوجد مستطيل، بُعْدَيْهِ (أي الطول والعرض) $(b-a)$ و $f(c)$ مساحته هي المساحة $A = \int_a^b f(x) dx$



VI. تقنيات حساب التكامل :

A. المكاملة بالأجزاء L' integration par parties :

01. خاصية:

لتكن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a, b]$ حيث u' و v' متصلتين على $[a, b]$ لدينا:

$$\int_a^b \underbrace{u(x) \times v'(x)}_{(1)} dx = \underbrace{[u(x) \times v(x)]}_a^b - \underbrace{\int_a^b u'(x) \times v(x)}_{(3)} dx$$

02. برهان :

• بمأن u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a, b]$ إذن الدالة $u \times v$ قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ مع

$$(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$$

• ومنه : $u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$

• الدوال : $u' \times v$ و $(u \times v)'$ و $u \times v'$ متصلة على $[a, b]$ لأن u' و v' متصلتين على $[a, b]$ و u و v متصلتين على $[a, b]$

(u و v دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $[a, b]$)

• يمكن إجراء التكامل على $[a, b]$ ل : $u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = \int_a^b ((u \times v)'(x) - u'(x) \times v(x)) dx$$

$$= \int_a^b (u \times v)'(x) dx - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx \quad : \text{ ومنه } u \times v' = (u \times v)' - u' \times v$$

$$= [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx$$

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx \quad \text{ خلاصة :}$$

03. طريقة وضع المكاملة بالأجزاء:

$$u(x) = \dots \quad u'(x) = \dots$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \dots \quad v(x) = \dots$$

04. أمثلة:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \quad \text{I نحسب:}$$

جواب:

لنحسب I باستعمال المكاملة بالأجزاء: نضع:

$$u(x) = x \quad u'(x) = 1$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = \cos x \quad v(x) = \sin x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin x dx$$

ومنه:

$$= \left(\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} - 0 \sin 0 \right) - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \left(\cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 \right) = \frac{\pi}{2} + 0 - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

I = $\frac{\pi}{2} - 1$: خلاصة

(2) نحسب: $J = \int_1^e \ln(x) dx$

لنحسب I باستعمال المكاملة بالأجزاء: نضع:

$$u(x) = \ln(x) \quad u'(x) = \frac{1}{x}$$

$$(1) \downarrow \quad (2) \searrow \quad - \quad \downarrow (3)$$

$$v'(x) = x \quad v(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int_1^e \ln(x) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{1}{2} x^2 dx$$

$$= \frac{1}{2} (e^2 \ln(e) - 1^2 \ln(1)) - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$J = \frac{1}{4} (e^2 + 1) \quad \text{خلاصة:} = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} (e^2 - 1^2) = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}$$

B. المكاملة بتغير المتغير : **L' integration par changement de variable**

01. خاصية:

لتكن f و g دالتين حيث f متصلة على خلى مجال J و g قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة g' متصلة على I مع

$$\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt \quad : I \text{ من } a \text{ و } b \text{ لدينا لكل } g(I) \subset J$$

02. برهان :

نعتبر F دالة أصلية ل f على J إذن : $F' = f$ لدينا :

$$\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_a^b F'(g(x)) \times g'(x) dx$$

$$= \int_a^b (F \circ g)'(x) \times g'(x) dx$$

$$= [F \circ g(x)]_a^b$$

$$= F \circ g(b) - F \circ g(a)$$

$$= F(g(b)) - F(g(a))$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

خلاصة : $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$

03. طريقة وضع المكاملة بتغيير المتغير :

نضع :

• $dt = g'(x) dx$ ومنه $t = g(x)$

• $x = a$ فإن $t = g(a)$. ثم ل : $x = b$ فإن $t = g(b)$

• ومنه نحصل على : $\int_a^b f(g(x)) \times g'(x) dx = \int_a^b \underbrace{f(g(x))}_{f(t)} \times \underbrace{g'(x) dx}_{dt} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$

04. أمثلة :

❖ مثال 1 :

نحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx$

نضع : $t = g(x) = \sin x$ ومنه : $dt = \cos x dx$

• من أجل : $x = 0$ فإن $t = g(0) = \sin 0 = 0$. ثم ل : $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = \sin \frac{\pi}{2} = 1$

• ومنه : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \underbrace{\cos x dx}_{dt} = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4} [t^4]_0^1 = \frac{1}{4}$

❖ مثال 2 :

نحسب : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

نضع : $\sin t = x$ ومنه : $\cos t dt = dx$. وكذلك : $\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\sin^2 t}$

• من أجل : $x = 0$ فإن $\sin t = 0$ أي $t = 0$. ثم ل : $x = 1$ فإن $\sin t = 1$ أي $t = \frac{\pi}{2}$

• ومنه :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-x^2}}_{\sqrt{1-\sin^2 t}} \underbrace{dx}_{\cos t dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \quad ; \quad \left(|\cos t| = \cos t , t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} t + \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

• خلاصة : $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

❖ مثال 3 :

نحسب : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + 1} \sin x dx$

نضع : $t = g(x) = e^{\cos x}$ ومنه : $dt = -\sin x e^{\cos x} dx$

• من أجل : $x = 0$ فإن $t = g(0) = e^{\cos 0} = e$. ثم ل : $x = \frac{\pi}{2}$ فإن $t = e^{\cos \frac{\pi}{2}} = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\cos x}}{e^{\cos x} + 1} \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\underbrace{e^{\cos x} + 1}_{\frac{1}{t+1}}} \underbrace{\sin x e^{\cos x}}_{-dt} dx = -\int_e^1 \frac{1}{t+1} dt = -[\ln|t+1|]_e^1 = \ln \frac{2}{1+e}$$

ومنه :

VII تطبيقات حساب التكامل:

حساب نهايات بعض المتتاليات:

مبرهنة 1

f دالة متصلة و موجبة و رتيبة على [a, b] . حيث :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a+k \times \frac{b-a}{n}\right) \quad \text{و} \quad \mathcal{A}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \int_a^b f(x) dx \quad \text{لدينا :}$$

- f دالة متصلة و موجبة و رتيبة على [a, b] .
- القطعة [a, b] يتم تقسمها إلى n قطعة متساوية الطول على الشكل [x_k, x_{k+1}] مع k ∈ 0, n و x₀ = a و x_n = b (القطع هي [x₀, x₁] و [x₁, x₂] و [x₂, x₃] و و [x_{n-1}, x_n] و ذلك بوضع $x_k = a + k \times \frac{b-a}{n}$.
- لدينا : $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.
- نعتبر Δ_k الحيز المحصور بين المنحنى (C_f) للدالة f و محور الأفاصيل و المستقيمين ذي المعادلتين x = x_{k+1} و x = x_k .
- نضع : A_k مساحة الحيز Δ_k . لدينا : $A_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$.
- بمأن : f رتيبة على [a, b] إذن f رتيبة على [x_k, x_{k+1}] لدينا :
 - (1) $x_k \leq x \leq x_{k+1} \Rightarrow f(x_k) \leq f(x) \leq f(x_{k+1})$; (حالة f تزايدية)
 - (2) $x_k \leq x \leq x_{k+1} \Rightarrow f(x_{k+1}) \leq f(x) \leq f(x_k)$; (حالة f تناقصية) .

✓ ندرس حالة f تزايدية :

$$(1) \Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k) dx \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = A_k \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_{k+1}) dx$$

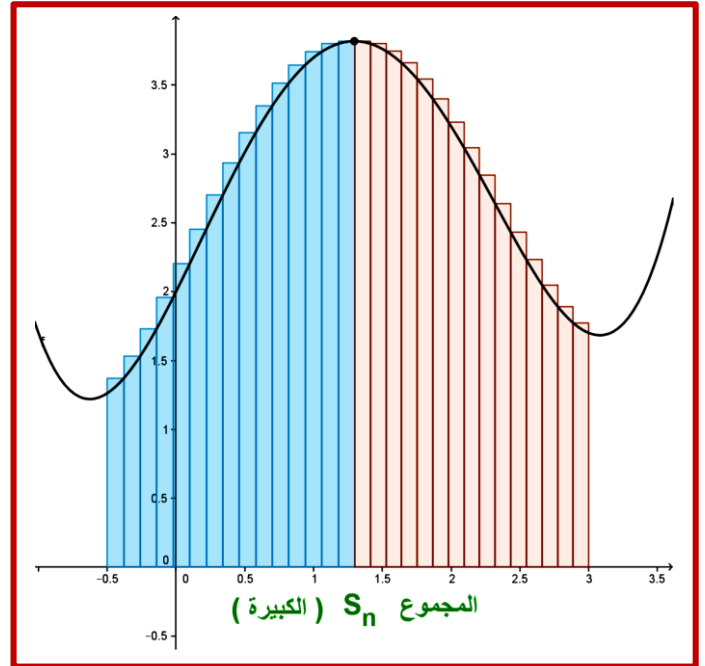
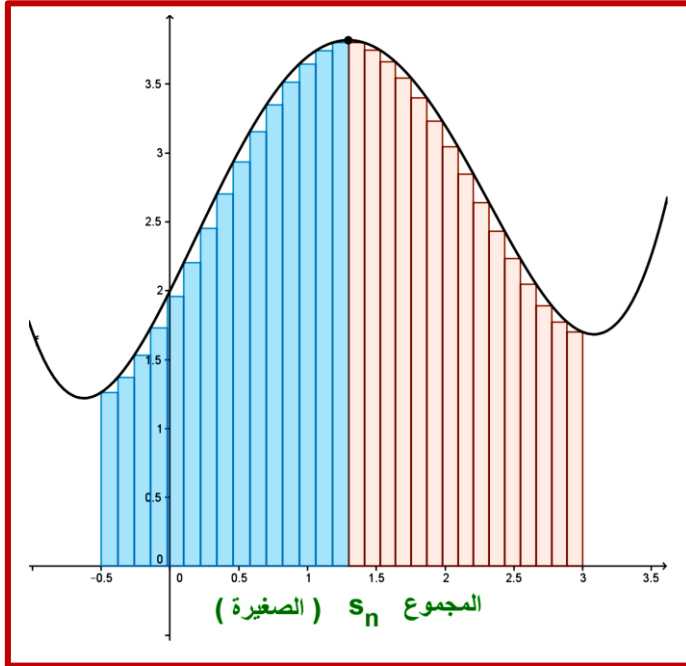
$$\Rightarrow (x_{k+1} - x_k) f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq (x_{k+1} - x_k) f(x_{k+1}) ; f(x_k) = C^t, f(x_{k+1}) = C^t$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{n} f(x_k) \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} A_k = \int_a^b f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_{k+1})$$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1})$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}_n \leq \int_a^b f(x) dx \leq S_n \quad \left(\mathcal{A}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) ; S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \right)$$



• لدينا : مساحة المستطيل الصغير $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ ومساحة المستطيل الكبير .

• لدينا : مجموع مساحات المستطيلات الصغرى و S_n مجموع مساحات المستطيلات الكبرى .

• لدينا : $S_n - \mathcal{A}_n = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a))$

• نتيجة التي حصلنا عليها هي : $\int_a^b f(x) dx \leq S_n$ و $\mathcal{A}_n \leq \int_a^b f(x) dx$ ومنه : $0 \leq \int_a^b f(x) dx - \mathcal{A}_n \leq S_n - \mathcal{A}_n$ (3)

• عندما : يكون n عدد القطع التي قسمت بها القطعة $[a, b]$ يؤول إلى $+\infty$ نحصل على $S_n = \mathcal{A}_n$ ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - \mathcal{A}_n = 0$ (4)

• حسب (3) و (4) نحصل على $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \int_a^b f(x) dx$

• لدينا : $S_n = (S_n - \mathcal{A}_n) + \mathcal{A}_n$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \mathcal{A}_n) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \int_a^b f(x) dx$

• خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \int_a^b f(x) dx$

✓ ندرس حالة f تناقصية : بنفس الطريقة نبين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \int_a^b f(x) dx$

❖ مبرهنة 2 :

f دالة متصلة وموجبة ورتيبة على $[a, b]$. حيث :

$$\mathcal{A}_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right) \text{ و } S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \times \frac{b-a}{n}\right)$$

وإذا كانت : f قابلة للاشتقاق على $[a, b]$ و دالتها المشتقة f' محدودة على $[a, b]$ (أي $|f'(x)| \leq A$, $\forall x \in [a, b]$, $\exists A \geq 0$)

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = \int_a^b f(x) dx$

❖ مثال :

• $u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} i$ من N^* نعتبر المتتالية : .

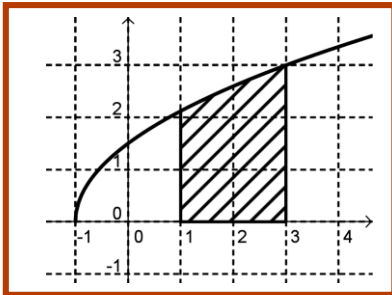
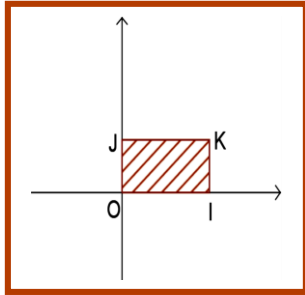
• نحسب : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

جواب :

لدينا : $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{k}{n^2} = u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \frac{i}{n} = \frac{1-0}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(0+k \times \frac{1-0}{n} \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \left(a+k \times \frac{b-a}{n} \right) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{k=n} f(x_k)$. يتبين أن

• $f(x) = x$ أي $f(x_k) = x_k$ ومنه $x_k = a+k \times \frac{b-a}{n}$ و $b=1$ و $a=0$:

• الدالة f متصلة و موجبة و تزايدية على $[0,1]$. ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$



• خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

02 حساب المساحات

• في هذه الفقرة نأخذ المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد $(0, \vec{i}, \vec{j})$

• دالة متصلة على قطعة $[a, b]$

ملحوظة: وحدة قياس المساحات هي مساحة المستطيل OIKJ

ونرمز لها بالرمز $u.a$ ($u.a = \text{unité aire}$)

• نعتبر (F) الحيز من المستوى (P) المحصور بين المنحنى (C_f) و محور الأفاصيل

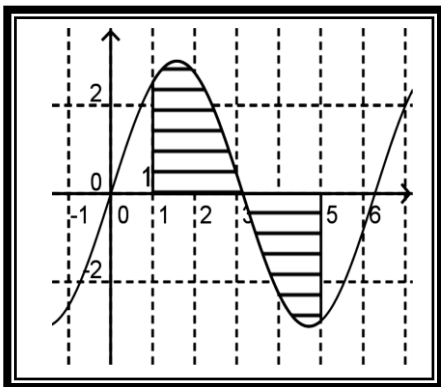
و المستقيمين اللذين معادلتاهما على التوالي $x=a$ و $x=b$.

• نعتبر A مساحة الحيز (F) من المستوى (P)

• ملحوظة: المساحة تحسب بالتكامل ومرتبطة بإشارة الدالة f على $[a, b]$

المساحة بوحدة المساحة ونرمز لها ب $u.a$ (ملحوظة إذا كان $1u.a = 2,5cm^2$ يجب ضرب التكامل A في 2,5 ومنه المساحة هي : $S = 2,5 \times A cm^2$)

f إشارتها تتغير على $[a, b]$

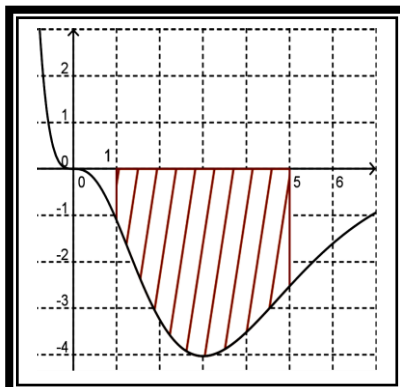


$A = \int_a^b |f(x)| dx$

مثال:

$A = \int_1^5 |f(x)| dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^5 f(x) dx$

f سالبة على $[a, b]$

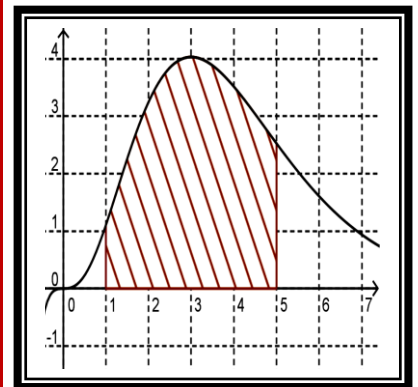


المساحة هي : $A = -\int_a^b f(x) dx$

مثال:

$A = -\int_1^5 f(x) dx = \int_5^1 f(x) dx$

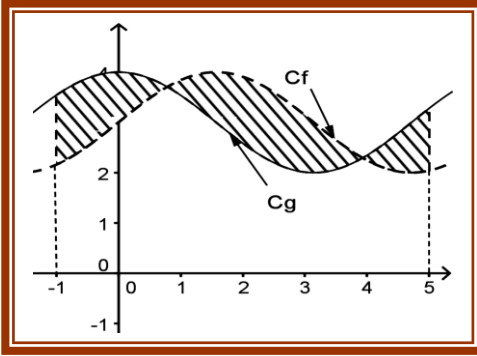
f موجبة على $[a, b]$



المساحة هي : $A = \int_a^b f(x) dx$

مثال: $\int_1^5 f(x) dx$

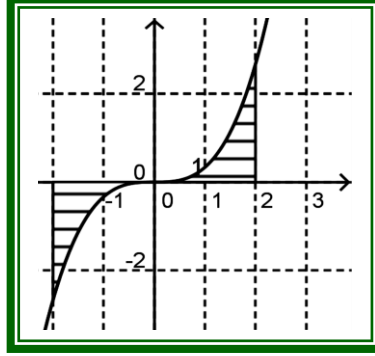
لنعتبر Δ مساحة الحيز المحصور (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما هما $x=a$ و $x=b$



المساحة هي : $A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

$$A = \int_{-1}^5 |f(x) - g(x)| dx = -\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx + \int_1^4 (f(x) - g(x)) dx - \int_4^5 (f(x) - g(x)) dx$$

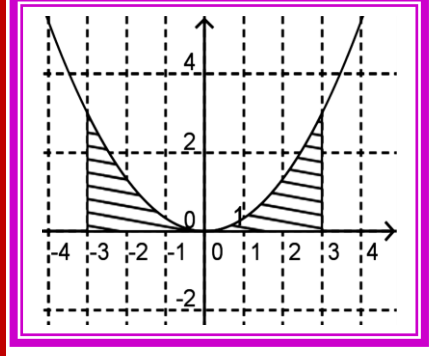
f دالة فردية و متصلة على قطعة $[-a, a]$



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = -\int_0^a f(x) dx$$

f دالة زوجية و متصلة على قطعة $[0, a]$ و $[-a, a]$



$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

ملحوظة:

إذا كان $1u.a = 2,5cm^2$ يجب ضرب التكامل A في 2,5 ومنه المساحة هي : $S = 2,5 \times A cm^2$

03 حساب الحجم:

A. حجم لجزء مجسم المحصور بين مستويين $(P_1) : z = a$ و $(P_2) : z = a$

- في هذه الفقرة نعتبر: الفضاء منسوب إلى معلم متعامد $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
 - لنعتبر في الفضاء مجسم (S) (solide) محصور بين مستويين (P_1) و (P_2) محددتين بالمعادلتين $(P_1) : z = a$ و $(P_2) : z = a$ حيث $a < b$.
 - لنعتبر المستوى (S_t) الذي معادلته الديكارتية هي $(S_t) : z = t$ حيث $t \in [a, b]$.
 - ليكن $F_t = (S_t) \cap (S)$ الشكل المحصل عليه لتقاطع المجسم (S) و المستوى (S_t) .
 - نعتبر $\mu(t)$ مساحة الشكل F_t .
1. خاصية :

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد منظم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$\mu : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$$

$$t \mapsto \mu(t)$$

إذا كانت الدالة μ متصلة على $[a, b]$ فإن حجم المجسم (S) هو : $V = A = \int_a^b \mu(t) dt$ (u.v volume)

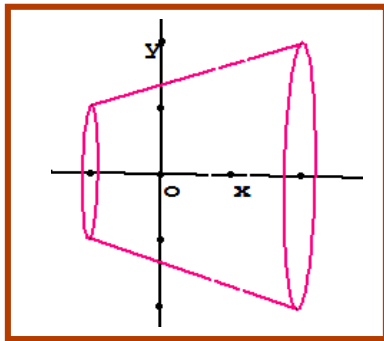
مع العلم أن وحدة قياس الحجم هي $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$

B. حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل :

- f دالة متصلة على القطعة $[a, b]$ مع $(a < b)$.
 - ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
 - نفترض أن المنحنى (C_f) قام بدورة كاملة حول محور الأفاصيل فإنه يواد مجسم الدوران للدالة f على $[a, b]$.
1. خاصية:

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. f دالة متصلة على القطعة $[a, b]$ مع $(a < b)$.

حجم المجسم المولد بدوران منحنى الدالة f حول محور الأفاصيل هو: $V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx$ بوحدة قياس الحجم $u.v$



2. أمثلة :

الفضاء منسوب إلى م.م.م $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}$

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1, 2]$ ب: $f(x) = x + 5$

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

(1) أنشئ المجسم على الرسم

(2) نحسب V حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[-1, 2]$

جواب:

(1) أنظر الرسم الأخير.

(2) حجم مجسم الدوران:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \int_{-1}^2 \pi (f(x))^2 dx = \int_{-1}^2 \pi (x-5)^2 dx = \int_{-1}^2 \pi (x-5)^2 dx = \frac{\pi}{3} [(x-5)^3]_{-1}^2 = \frac{189\pi}{3}$$

لدينا: $\frac{189\pi}{3}$

مثال 2 :

- الفضاء منسوب إلى م.م.م $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ؛ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \text{ cm}$

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[-1, 1]$ ب: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

ليكن (C_f) منحناها في المعلم $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

(3) أنشئ المجسم على الرسم

(4) نحسب V حجم مجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل على المجال $[-1, 1]$

جواب:

(1) أنظر الرسم الأخير.

(2) حجم مجسم الدوران:

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (x-5)^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (x-5)^2 dx = \frac{\pi}{3} [(x-5)^3]_{-1}^2 = \frac{189\pi}{3}$$

لدينا: $\frac{189\pi}{3}$

$$\int_a^b \pi (f(x))^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (\sqrt{1-x^2})^2 dx = \int_{-1}^1 \pi (1-x^2) dx = \pi \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \frac{4\pi}{3} \text{ cm}^3$$

طريقة 2: (حجم كرة شعاعها هو $R = 1$).

