

المدة: 4 ساعات	الامتحان التجريبي رقم 4	نوبة عيب المسح ثانوية أنيس
الصفحة : 1/2	مادة: الرياضيات / 6 رياضيات السنة الدراسية 2010/2009	

التمرين الأول 4 نقطة

- المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر (O, \bar{u}, \bar{v}) .
 نعتبر النقط $A(1)$, $A'(-1)$, $B(i)$, $B'(-i)$ من المستوى .
 نربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطتين $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$ بحيث يكون المثلثين BMM_1 و AMM_2
 متساويي الساقين وقائمي الزاوية مع : $(M_1, B, M_1, M) \equiv (M_2, M, M_2, A)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$
 1. أ. بين أن $z - z_1 = i(i - z_1)$ و $1 - z_2 = i(z - z_2)$ 1
 ب. تحقق أن $z_1 = \frac{1+i}{2}(z+1)$ و $z_2 = \frac{1-i}{2}(z+i)$ 0.5
 2. أ. اثبت أن $OM_1 = OM_2 \Leftrightarrow |z+1| = |z+i|$ 0.5
 ب. استنتج (Δ) مجموعة النقط $M(z)$ التي من اجلها تكون $OM_1 = OM_2$ وانشئ (Δ) . 0.5
 ج. اثبت أن $OM_1 = M_1M_2 \Leftrightarrow |z+1|^2 = 2|z|^2$ 0.5
 د. استنتج (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي من اجلها يكون $OM_1 = M_1M_2$ وانشئ (Γ) 0.5
 3. استنتج النقط $M(z)$ التي من اجلها يكون المثلث OM_1M_2 متساوي الأضلاع. 0.5

التمرين الثاني 3,5 نقطة

- المستوى منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر $(O, \bar{e}_1, \bar{e}_2)$.
 نعتبر التطبيق g من (P) إلى (P) الذي يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$ بحيث $z' = (1+i)z - 1 + 3i$
 1. حدد النقط الصامدة ب g . 0.5
 2. بين أن $g \circ g$ تحاك محددًا مركزه Ω ونسبته k . 0.5
 3. بين أنه عندما تتغير $M(z)$ على الدائرة $C(O, 1)$ فإن $M'(z')$ تتغير على مجموعة (C') يتم تحديدها 1
 4. نفترض أن $z = m + ni$ حيث m و n عنصرين من \mathbb{Z} ونعتبر النقطة $A(3+2i)$
 أ. بين أن $(\Omega A) \perp (\Omega M') \Leftrightarrow 5m + 3n = -2$ et $(m, n) \neq (-1, 1)$ 0.5
 ب. تحقق أن حلول $5m + 3n = -2$ هي الأزواج $(-3k-1, 5k+1)$ حيث $k \in \mathbb{Z}$ 0.5
 ج. استنتج النقط $M(m+ni)$ حيث m و n تنتمي للمجال $[-6, 6]$ و $(\Omega A) \perp (\Omega M')$ 0.5

التمرين الثالث

19,6 نقطة

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{e} (1+x)^{\frac{1}{e} + \frac{1}{2}} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي:

ولیکن (C_f) منحناها في معلم متعامد ممنظم $(0, \bar{i}, \bar{j})$.

الجزء الأول

- (1) تحقق أن f متصلة في 0. 0,5
 (2) لكل $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ نضع
 $w(t) = u(t)v(x) - u(x)v(t)$ و $v(t) = t^2$ و $u(t) = \ln(1+t) - t$
 (a) باستعمال مبرهنة Rolle بين أنه يوجد c محصور بين 0 و x بحيث : $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(c)}{v(c)}$ 1
 (b) استنتج أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}$ 0,5
 (3) (a) بين أن $(\forall x \neq 0) : \frac{f(x) - f(0)}{x} = \left(\frac{2+x}{2} \cdot \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} + \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{e^{h(x)} - 1}{h(x)}$ 0,5
 حيث h دالة تحقق $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = 0$

(4) (a) أحسب $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

1

(b) بين $(\forall x \neq 0) : \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{e} (1+x)^{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1+x}{x}$

0,5

(c) استنتج الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f)

0,5

(5) نعتبر الدالة φ المعرفة على $]-1, +\infty[$ بما يلي: $\varphi(x) = \frac{x^2+2x}{1+x} - 2 \ln(1+x)$

1

(a) أدرس تغيرات الدالة φ واستنتج إشارتها . (لاحظ أن $\varphi(0) = 0$)

0,5

(b) بين أن $(\forall x \neq 0) : f'(x) = \frac{1}{2x^2} \varphi(x) f(x)$

0,5

(c) ضع جدول تغيرات الدالة f على $]-1, +\infty[$

(d) استنتج أن $(\forall x \in]-1, +\infty[) : f(x) \geq 1$

0,5

(6) أنشئ المنحنى (C_f)

1

الجزء الثاني

لكل $x \in \mathbb{R}^+$ و $n \in \mathbb{N}^*$ نضع $u_n(x) = \frac{(nx)^{n \frac{1}{2}}}{n!}$ ونضع $v_n = u_n\left(\frac{1}{e}\right)$

0,5

(1) (a) بين أن $(\forall x > 0) \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = e \cdot x \cdot f\left(\frac{1}{n}\right)$

(b) استنتج أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ تزايدية :

0,5

(2) (a) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

0,5

(b) استنتج أن $(\forall x \in \mathbb{R}^+) : \ln(f(x)) \leq \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{6}$

0,5

(3) ليكن $\{1\} - n \in \mathbb{N}^*$

(a) بين أن $(\forall k \in [1, n-1]) : \ln\left(u_{k+1}\left(\frac{1}{e}\right)\right) - \ln\left(u_k\left(\frac{1}{e}\right)\right) \leq \frac{1}{12} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{k^3}$

0,5

(b) استنتج أن $(\forall n \geq 1) : \ln(u_n\left(\frac{1}{e}\right)) \leq -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{12} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{k^3}\right)$

0,5

(c) أثبت أن المتتالية (v_n) مكبورة واستنتج أنها متقاربة .

0,5

(4) أحسب $\lim\left(\frac{n^n e^{-n}}{n!}\right)$

0,5