تمرين 1 — $4pnt$

ليكن $(x_0,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ بحيث $pgcd(x_0,q)=1$، و لتكن $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية اساسها q و حدها الأول x_0 و تحقق $(\forall n\in\mathbb{N}) \ : \ x_{n+1}+2x_{n+3}-44x_0^2q^n=0$

❶ أ) بين أن : $q+2q^3=44x_0$ — $0,25$

ب) بين أن : $pgcd(1+2q^2,4)=1$ — $0,25$

ج) استنتج ان : 4 يقسم q و ان q يقسم 44 ثم حدد $(x_0;q)$. — $0,75$

❷ نفترض في ما يلي أن $(x_0,q)=(3,4)$ و نضع $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \ : \ S_n=\sum_{i=0}^{n-1} x_i$

أ) تحقق من أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \ : \ S_n=4^n-1$ ثم استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \ : \ S_n\equiv 0[3]$. — $0,5$

ب) تحقق من أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*) \ : \ S_{n+1}=4S_n+3$ ثم حدد $pgcd(S_{n+1},S_n)$ — $0,5$

ج) بين أن $n\equiv 0[2]$ اذا و فقط اذا كان $S_n\equiv 0[5]$ — $0,5$

❸ بين أن $4^{28}\equiv 1[29]$ — $0,25$

❹ أ) حدد أصغر عدد طبيعي غير منعدم n يحقق $4^n\equiv 1[17]$ — $0,25$

ب) استنتج أن $(\forall k\in\mathbb{N}) \ : \ 4^{4k}\equiv 1[17]$ — $0,25$

❺ حدد أربعة قواسم أولية للعدد S_{28}. — $0,5$

تمرين 2 — $4pnt$

ليكن m عدد عقديا يخالف 1.

الجزء 1 (2ن)

نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة $(\mathrm{E_m})$ ذات المجهول z :

$$(\mathrm{E_m}) : \quad \mathrm{z^2-(1-i)(m+1)z-i\left(m^2+1\right)=0}$$

❶ أ) تحقق من أن $\Delta=[(1+i)(m-1)]^2$ هو مميز المعادلة (E_m) — $0,5$

ب) حل المعادلة $(\mathrm{E_m})$ في $\mathbb{C}$. — $0,5$

ج) حدد على الشكل الجبري قيمتي العدد العقدي m لكي يكون جداء حلي المعادلة $(\mathrm{E_m})$ يساوي 1. — $0,5$

❷ نضع $\mathrm{z_1=1-im}$ و $\mathrm{z_2=m-i}$.

في حالة $\mathrm{m=e^{i\theta}}$ و $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$، أكتب $\mathrm{z_1}$ و $\mathrm{z_2}$ على الشكل المثلثي. — $0,5$

الجزء 2 (2ن)

المستوى منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر $(\mathrm{O},\vec{\mathrm{u}},\vec{\mathrm{v}})$

نعتبر النقط M و $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ التي ألحاقها على التوالي $\mathrm{m, z_1=1-im}$ و $\mathrm{z_2=m-i}$.

❶ حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط M و $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ مستقيمية. — $0,5$

❷ أ) بين أن التحويل R الذي يربط النقطة $\mathrm{M(z)}$ بالنقطة $\mathrm{M'(z')}$ بحيث $\mathrm{z'=1-iz}$: هو دوران ينبغي تحديد مركزه Ω و زاويته. — $0,5$

ب) أثبت أن العدد العقدي $\frac{\mathrm{z_2-z_1}}{\mathrm{z_2-m}}$ تخيلي صرف اذا و فقط اذا كان $\mathrm{Re(m)+Im(m)=1}$. — $0,5$

ج) استنتج مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و $\mathrm{M_1}$ و $\mathrm{M_2}$ متداورة. — $0,5$

تمرين 3		$5,75pnt$
: لتكن f الدالة المعرفة على $D=]-1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=x^2\ln(1+x)$. و ليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ بالوحدة $2cm$ و نأخذ $\ln 2\simeq 0,7$ و $\ln 3\simeq 1,1$.		
❶ احسب $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ وأول النتائج مبيانيا.		1
❷ لكل x من D نضع $u(x)=2\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}$.		
أ- ادرس تغيرات الدالة u على D.		$0,25$
ب- احسب $u(0)$ واستنتج إشارة $u(x)$ على D.		$0,5$
❸ بين أن f قابلة للاشتقاق على D واحسب $f'(x)$ لكل x من D ثم ضع جدول تغيرات الدالة f.		1
❹ حدد معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند أصل المعلم ثم ارسم (C_f) مبرزا النقط التي أفاصيلها $-0,5$ و 0 و 1 و 2.		1
❺ احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين جزء من (C_f) على $[0,1]$ و محور الأفاصيل.		$0,75$
❻ أ- ليكن n من $\mathbb{N}$. بين أن المعادلة $f(x)=\sqrt{n}$ تقبل حلا بالضبط u_n في D.		$0,5$
ب- ادرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.		$0,25$
ج- بين أن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ غير مكبورة وحدد نهايتها.		$0,5$
تمرين 4		$6,25pnt$
نعتبر الدالتين العدديتين f و F المعرفتين على $\mathbb{R}^+$ بـ : $f(x)=\sqrt{e^{2x}-1}$ و $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)dt$.		
الجزء 1		
❶ بين أن F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}^+$ واحسب $F'(x)$ لكل $x>0$.		$0,5$
❷ لكل $x>0$ نضع $G(x)=f(x)-\arctan(f(x))$.		
أ) بين أن G قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ وأن $(\forall x\in]0,+\infty[)\ :\ G'(x)=f(x)$.		$0,75$
ب) استنتج أن $(\forall x\in]0,+\infty[)\ :\ G(x)=F(x)$		$0,75$
ج) استنتج أن $\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{2})}\sqrt{e^{2x}-1}dx=1-\frac{\pi}{4}$		$0,5$
الجزء 2		
لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $I_n=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{2})}(f(t))^n dt$.		
❶ أ) لكل $x\geq 0$ نضع $g(x)=e^{2x}-1$ بين أن $(\forall x\in[0,+\infty[)\ :\ g'(x)=2(1+g(x))$		$0,5$
ب) استنتج أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ I_{n+2}+I_n=\dfrac{1}{n+2}$ (لاحظ أن $I_n=\displaystyle\int_0^{\ln(\sqrt{2})}(g(t))^{\frac{n}{2}}dt$)		$0,75$
ج) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ 0\leq I_n\leq\dfrac{1}{n+2}$ واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.		$0,75$
❷ لكل n من $\mathbb{N}^*$ نضع $u_n=I_{n+4}-I_n$.		
أ) باستعمال السؤال ❶ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ :\ u_n=\dfrac{1}{n+4}-\dfrac{1}{n+2}$		$0,5$
ب) احسب المجموع $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}u_{4k+1}$ بدلالة I_{4n+5} و I_1.		$0,5$
ج) استنتج مما سبق أن $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{k=2n+1}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$		$0,75$

تمرين 5

Bonus

ليكن a و b و c و x من $\mathbb{N}$ مع $x \geq 2$، الكتابة $\overline{abc}^{(x)}$ هي كتابة العدد $\overline{abc}$ في نظمة العد للاساس x.

❶ نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $(E)\ :\ (x+1)^2 = 9 + 5y$.

أ) ليكن (x, y) حلا للمعادلة (E). بين أن : $x \equiv 1[2]$ او $x \equiv 2[5]$.

ب) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E).

❷ بين أن $(\forall k \in \mathbb{Z})\ :\ (5k^2+4k-1) \wedge (5k+1) = (k-1) \wedge 8$

❸ حل في $\mathbb{N}^2$ النطمة

$$(S)\begin{cases} \overline{121}^{(x)} = \overline{59}^{(y)} \\ x \wedge y = 8 \\ x \equiv 1[5] \end{cases}$$