

I. الزمرة \mathcal{L} Le groupe

A. الزمرة :

1. تعريف :

زمرة هي مجموعة G غير فارغة مزودة بقانون تركيب داخلي \perp و تحقق ما يلي :

- القانون \perp تجمعي .

- القانون \perp له عنصر محايد e .

- كل عنصر من G له مماثل .

إذا تحققت التبادلية الزمرة تسمى زمرة تبادلية . (G, \perp) est un groupe commutatif (ou abélien) .

إذا كانت المجموعة G منتهية الزمرة تسمى زمرة منتهية ورئيسي G ($cardA$) يسمى رتبة G و إذا كان العكس الزمرة تسمى زمرة غير منتهية .

2. أمثلة :

المجموعات : $\mathbb{C} ; \mathbb{R} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{Z}$ مزودة بالجمع هي زمرة تبادلية غير منتهية

- $(\mathbb{N}, +)$ ليست بزمرة لأن 5 مماثله هو -5 و $-5 \notin \mathbb{N}$.

- المجموعات $\mathbb{C}^* ; \mathbb{R}^* ; \mathbb{Q}^*$ مزودة بالضرب هي زمرة تبادلية .

- (\mathbb{Z}^*, \times) ليست بزمرة لأن كل عدد من $\mathbb{Z}^* \setminus \{-1, 1\}$ ليس له مماثل بالنسبة للضرب .

- $(\mathcal{P}(E), \cup)$ (مع $E \neq \emptyset$ و \cup هي الاتحاد) تبادلي و تجمعي و الجزء الفارغ \emptyset هو العنصر المحايد ولكن \emptyset هو العنصر الوحيد الذي يتوفر على مماثل إذن $(\mathcal{P}(E), \cup)$ ليست بزمرة .

- $(\mathcal{P}(E), \cap)$ (مع $E \neq \emptyset$ و \cap هو التقاطع) تبادلي و تجمعي و الجزء المملوء هو العنصر المحايد ولكن E هو العنصر الوحيد الذي يتوفر على مماثل إذن $(\mathcal{P}(E), \cap)$ ليست بزمرة .

- $(\mathcal{P}(E), \Delta)$ (مع $E \neq \emptyset$ و Δ هي الفرق التماثلي أي $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$) هي زمرة تبادلية .

- $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$ زمرة تبادلية نفس الشيء ل $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), +)$. ولكن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ ليس بزمرة وكذلك $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \times)$.

- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية .

3. خاصيات : (حسب الدرس الخاص بالقوانين التركيب الداخلية)

إذا كانت (G, \perp) زمرة .

- العنصر المحايد موجود ووحيد في (G, \perp) .

- كل عنصر $a \in G$ له مماثل و حيد a' في (G, \perp) .

- كل عنصر $a \in G$ هو منتظم في (G, \perp) .

- a و b مماثلتهما هما على a' و b' التوالي في (G, \perp) لدينا مماثل $a \perp b$ في (G, \perp) هو $(a \perp b)' = b' \perp a'$.

4. برهان :

✓ نبين على صحة الخاصية : كل عنصر a من G هو منتظم في (G, \perp) .

ليكن a و b و c من G .

- حيث $a \perp b = a \perp c$: (1)
- إذن : $a' \perp a \perp b = a' \perp a \perp c$ (التركيب ب a' على اليسار في العلاقة (1)).
ومنه : $b = c$
- حيث $b \perp a = c \perp a$: (1)
- إذن : $b \perp a \perp a' = c \perp a \perp a'$ (التركيب ب a' على اليمين في العلاقة (1)).
ومنه : $b = c$
- خلاصة : العنصر a من G منتظم بالنسبة للقانون \perp .
- ملحوظة : $x \in G : a \perp x = b$ تقبل حلا وحيدا في G هو $x = a' \perp b$ أما المعادلة $x \in G : x \perp a = b$ الحل هو $x = b \perp a'$.
- إذا كانت الزمرة (G, \perp) تبادلية المعادلتين السابقتين تمثلان نفس المعادلة و الحلين متساويين.
- حالة (G, \perp) زمرة منتهية . كل عنصر x من G يظهر مرة واحدة بالضبط في كل سطر وفي كل عمود من جدول قانون (G, \perp)
- **B.** تشاكل زمرة : *L'homomorphisme du groupe*
- **I.** خاصية :

f تشاكل من (E, \perp) نحو $(F, *)$ (أي $f : (E, \perp) \rightarrow (F, *)$)
إذا كانت (E, \perp) زمرة (تبادلية) فإن $(f(E), *)$ زمرة (تبادلية)

II الزمرة الجزئية : *Le sous groupe*

A. زمرة جزئية :

I. تعريف :

- لتكن (G, \perp) زمرة .
- نقول إن جزء H من G هو زمرة جزئية ل G إذا كان :
- $H \neq \emptyset$
- H جزء مستقر من (G, \perp) . (أي $(\forall (a,b) \in H^2 : a \perp b \in H$)
- H زمرة بالنسبة للقانون التركيبي الداخلي المستخلص ل \perp ل G .

2. ملحوظة :

- H تحتوي على الأقل على العنصر المحايد e للقانون \perp .
- $\{e\}$ هي زمرة جزئية ل G . G هي زمرة جزئية ل G .
- كل زمرة جزئية تخالف $\{e\}$ و G تسمى زمرة جزئية فعلية ل G .

3. أمثلة :

- مثال 1 : $(\mathbb{Q}, +)$ زمرة تبادلية لدينا كذلك $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة تبادلية إذن $(\mathbb{Z}, +)$ زمرة جزئية تبادلية ل $(\mathbb{Q}, +)$.
و كذلك الجزء $3\mathbb{Z} = \{3k / k \in \mathbb{Z}\}$ زمرة جزئية تبادلية ل $(\mathbb{Z}, +)$.

- مثال 2 : (\mathbb{C}^*, \times) زمرة تبادلية أما $U = \{z \in \mathbb{C}^* / |z| = 1\}$ (الدائرة المثلثية) هي زمرة جزئية تبادلية لـ (\mathbb{C}^*, \times) .
- أما الجزء $\Gamma_n = \{z \in \mathbb{C}^* / z^n = 1\}$ المتكونة من الجذور من الرتبة n للوحدة فهو زمرة جزئية لـ U .

B. خصائص الزمرة الجزئية :

1. خاصية :

(H, \perp) زمرة جزئية لزمرة (G, \perp) حيث e هو العنصر المحايد لـ \perp بالنسبة لـ G و a و a' متماثلين لـ \perp في G .

- العنصر المحايد لـ (H, \perp) هو بالضبط e .
- إذا كان $a \in H$ فإن مماثل a هو a' و $a' \in H$.
- ليكن a و b من H و b' مماثل b في G لدينا : $a \perp b' \in H$.

2. برهان :

- نبرهن على صحة : العنصر المحايد لـ (H, \perp) هو بالضبط e .
- بما أن : (H, \perp) زمرة جزئية إذن H زمرة بالنسبة للقانون التركيبي الداخلي المستخلص لـ G و H له العنصر المحايد

ليكن هو e' و $e' \perp e' = e'$ (1)

ومنه : $e \perp e' = e'$ (لأن العنصر المحايد لـ \perp في G) (2)

حسب (1) و (2) نحصل على $e \perp e' = e' \perp e'$

إذن : $e = e'$ (لأن جميع العناصر منتظم ومن بينها $e' \in G$ لأن H جزء من G).

خلاصة : العنصر المحايد لـ (H, \perp) هو بالضبط e .

- نبرهن على صحة : إذا كان $a \in H$ فإن مماثل a هو a' و $a' \in H$.

نضع : مماثل a هو a' في (G, \perp) . مماثل a هو a'' في (H, \perp) .

نبين أن : $a'' = a'$.

لدينا : مماثل a هو a' في (G, \perp) إذن : $a \perp a' = e$ (3)

مماثل a هو a'' في (H, \perp) إذن : $a \perp a'' = e$ (4)

حسب : (3) و (4) نحصل على $a \perp a' = a \perp a''$ إذن $a'' = a'$ (لأن جميع العناصر منتظم في زمرة)

خلاصة : إذا كان $a \in H$ فإن مماثل a هو a' و $a' \in H$.

- نبرهن على صحة : ليكن a و b من H و b' مماثل b في G لدينا : $a \perp b' \in H$.

ليكن b من H إذن مماثله b' من H حسب البرهان السابق.

بما أن H جزء مستقر من (G, \perp) إذن $a \perp b' \in H$ (لأن b من H و b' من H).

خلاصة : $a \perp b' \in H$.

3. خاصية مميزة 1 :

(H, \perp) زمرة جزئية لزمرة (G, \perp) إذا وفقط إذا كان :

$H \neq \emptyset$

$(a \in H \text{ و } H \neq \emptyset \text{ ب } b \in H) \Rightarrow a \perp b \in H$

$a \in H \Rightarrow a' \in H$ (مع a' مماثل a لـ \perp في G)

4. برهان :

\Rightarrow الاستلزام المباشر صحيح لأن (H, \perp) زمرة جزئية و حسب الخاصية السابقة .

\Leftarrow نبين على صحة الاستلزام العكسي .

بما أن : $(a \in H \text{ و } b \in H) \Rightarrow a \perp b \in H$ إذن H جزء مستقر في (G, \perp) . إذن \perp تجمعي في H (لأنه تجمعي في G) .

من جهة أخرى $H \neq \emptyset$ يحتوي على الأقل على عنصر ليكن a من H إذن مماثله a' من H (حسب $a \in H \Rightarrow a' \in H$) .

وبما أن H جزء مستقر في (G, \perp) إذن $a \perp a' \in H$ أي $e \in H$.

إذن : \perp تجمعي في H و H يحتوي على العنصر المحايد و كل عنصر a من H مماثله a' من H وبالتالي (H, \perp) زمرة .

ومنه : (H, \perp) زمرة جزئية لزمرة (G, \perp)

إذن الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصية المميزة صحيحة .

5. خاصية مميزة 2 :

(H, \perp) زمرة جزئية لزمرة (G, \perp) إذا وفقط إذا كان :

• $H \neq \emptyset$

• $(a \in H \text{ و } b \in H) \Rightarrow a \perp b' \in H$ (مع b' مماثل ل b في G) .

6. برهان :

\Rightarrow الاستلزام المباشر صحيح لأن (H, \perp) زمرة جزئية و حسب الخاصية السابقة لكل a من H كذلك a' من H ومنه $a \perp b' \in H$

\Leftarrow نبين على صحة الاستلزام العكسي .

لدينا : $(a \in H \text{ و } b \in H) \Rightarrow a \perp b' \in H$ نأخذ $a = b$ ومنه $a \perp a' = e \in H$ إذن العنصر المحايد e من H .

نأخذ هذه المرة $a = e$ إذن $a \perp a' = e' \in H$ ومنه a' مماثل ل a ينتمي ل H . إذن الشرط الأول للخاصية المميزة رقم 1 يتحقق

من جهة أخرى H جزء مستقر في (G, \perp) إذن لكل a و c من H فإن $ac \in H$ نأخذ $c = b'$ إذن $a \perp b' \in H$.

إذن الاستلزام العكسي صحيح .

خلاصة : الخاصية المميزة 2 صحيحة .

7. أمثلة :

(G, \oplus) زمرة . (G_1, \oplus) و (G_2, \oplus) زمرتين جزئيتين ل (G, \oplus) . نعتبر $H = G_1 \cap G_2$. مع العنصر المحايد ل (G, \oplus) .

بين أن H زمرة جزئية ل G .

• لدينا : e ينتمي لكل من (G_1, \oplus) و (G_2, \oplus) لأنهما زمرتين جزئيتين و بالتالي $e \in H = G_1 \cap G_2$ إذن $H \neq \emptyset$.

ومنه : $H \neq \emptyset$

• ليكن x و y من H إذن x و y عنصران من G_1 و G_2 إذن y' مماثل ل y عنصر من G_1 و G_2 إذن $xy' \in G_1$ و كذلك

$xy' \in G_2$ (لأنهما زمرتين جزئيتين) و بالتالي $xy' \in G_1 \cap G_2 = H$

ومنه : $xy' \in H$

خلاصة : H زمرة جزئية ل G .

😊 **ملحوظة :** إذن أثبتنا : تقاطع زمرتين جزئيتين هي زمرة جزئية .

III الحلقة : $L'anneau$

A. التوزيعية : $La\ distributivité$

فيما تبقى من الدرس E مجموعة مزودة بقانونين تركيبين داخليين \perp ثم * . و نكتب باختصار $(E, \perp, *)$.

1. تعريف :

- نقول إن القانون * توزيعي من اليسار على القانون \perp إذا كان : $\forall (a,b,c) \in E^3 : a*(b \perp c) = (a*b) \perp (a*c)$
- نقول إن القانون * توزيعي من اليمين على القانون \perp إذا كان : $\forall (a,b,c) \in E^3 : (b \perp c)*a = (b*a) \perp (c*a)$
- إذا تحقق التوزيعية من اليمين وكذلك من اليسار نقول باختصار لقانون * توزيعي على القانون \perp .

2. ملحوظة :

إذا كان القانون * تبادلي (وليس بالضرورة أن يكون القانون \perp تبادلي) التوزيعية من جهة واحدة تكفي لتحقيق التوزيعية .

3. أمثلة :

- الضرب توزيعي على الجمع في المجموعات التالية : $C ; \mathbb{R} ; \mathbb{Q} ; \mathbb{Z} ; \mathbb{N}$
- \cap التقاطع توزيعي على \cup الاتحاد في $\mathcal{P}(E)$ وكذلك \cup التقاطع توزيعي على \cap الاتحاد في $\mathcal{P}(E)$.
- الضرب توزيعي على الجمع في $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- الضرب توزيعي على الجمع في $M_2(\mathbb{R})$ وكذلك في $M_3(\mathbb{R})$.

B. بنية حلقة : *structure d'anneau*

1. تعريف :

$(E, \perp, *)$ مجموعة مزودة بقانونين تركيبين داخليين \perp و *

نقول إن $(E, \perp, *)$ حلقة إذا كان :

- القانون الأول \perp له بنية زمرة تبادلية في E . (أي (E, \perp) زمرة تبادلية) .
- القانون الثاني * تجميعي في E .
- القانون الثاني * توزيعي على القانون الأول \perp في E .

2. ملحوظة :

- إذا تحققت تبادلية القانون الثاني * الحلقة $(E, \perp, *)$ تسمى حلقة تبادلية (*anneau commutatif (ou abélien)* $(E, \perp, *)$ est un anneau commutatif (ou abélien)
- إذا كان القانون الثاني * يتوفر على العنصر المحايد (نرسم له في الغالب ب u) نقول أن الحلقة واحدة و وحدتها u (*anneau unitaire (ou unifié)* $(E, \perp, *)$ est un anneau unitaire (ou unifié)
- إذا كانت المجموعة E منتهية الزمرة تسمى حلقة منتهية و إذا كان العكس الحلقة تسمى زمرة غير منتهية .

3. أمثلة :

- حلقة تبادلية واحدة حيث $u = 1$ العنصر المحايد للقانون الثاني للضرب في \mathbb{Z} ($\mathbb{Z}, +, \times$)
- حلقة تبادلية وليست بواحدية لأن $u = 1 \notin 2\mathbb{Z}$ ($2\mathbb{Z}, +, \times$)
- حلقة تبادلية واحدة حيث وحدتها هي $u = 0$ العنصر المحايد للقانون الثاني يساوي العنصر المحايد للقانون الأول. ($\{0\}, +, \times$)
- حلقة تبادلية واحدة حيث وحدتها هي $u = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ العنصر المحايد للقانون الثاني للضرب في $M_2(\mathbb{R})$.
- حلقة تبادلية واحدة حيث وحدتها هي $u = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ العنصر المحايد للقانون الثاني للضرب في $M_3(\mathbb{R})$.

C. قواعد الحساب في الحلقة : *Règle de calcul dans un anneau*

1. ملحوظة: جميع قواعد الحساب في الحلقة التبادلية الواحدية $(\mathbb{Z}, +, \times)$ تبقى صالحة في أي حلقة تبادلية واحدية $(E, \perp, *)$ التي تنتج

من تعريف الحلقة مثل نضع $a^0 = u$ كما هو في \mathbb{Z} $a^0 = 1$ وكذلك $a^n = \underbrace{a * a * a * \dots * a}_n$ (n من العوامل).

2. تمرين تطبيقي:

نعرف في \mathbb{Z}^2 قانونين تركيبين داخليين هما $+$ و \times معرفين كما يلي:

$$\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{Z}^2 : (a,b) + (a',b') = (a+a', b+b')$$

$$\forall (a,b), (a',b') \in \mathbb{Z}^2 : (a,b) \times (a',b') = (aa', bb')$$

بين أن: $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ حلقة واحدية مع العنصر المحايد $+$ هو $(0,0)$ ول \times هو $(1,1)$.

3. عنصر الماص *élément absorbant*

خاصية و تعريف:

لتكن $(E, \perp, *)$ حلقة و e العنصر المحايد للقانون الأول \perp في E .

$$\forall a \in E : a * e = e * a = e$$

وفي هذه الحالة العنصر المحايد للقانون الأول e يسمى عنصر ماص للقانون الثاني $*$ في E

برهان:

ليكن a و b من E .

لدينا: $b \perp e = b$ ومنه $a * (b \perp e) = a * b$ (نركب بالقانون $*$)

إذن: $(a * b) \perp (a * e) = a * b$ (لأن $*$ توزيعي على \perp)

إذن: $(a * b) \perp (a * e) = (a * b) \perp e$ (لأن $a * b = (a * b) \perp e$)

إذن: $(a * e) = e$ (لأن $a * b$ عنصر منتظم).

ومنه: $a * e = e$

بالنفس الطريقة نبين أن: $e * a = e$

خلاصة: $\forall a \in E : a * e = e * a = e$

4. خاصية المماثل بالنسبة للقانون 2 *

خاصية و تعريف:

لتكن $(E, \perp, *)$ حلقة. e العنصر المحايد للقانون الأول \perp في E . و a' و b' مماثلين ل a و b من E بالنسبة للقانون الأول \perp في E

$$\forall a, b \in E : a * b' = a' * b = (a * b)'$$

$$\forall a, b \in E : a * b = (a * b)'$$

برهان:

ليكن a و b من E حيث a' و b' مماثلين ل a و b من E بالنسبة للقانون الأول.

نبين أن: $(a * b)' = a * b'$

لدينا: $b \perp b' = e$

إذن: $a * (b \perp b') = a * e$

إذن: $(a * b) \perp (a * b') = a * e$ (لأن $*$ توزيعي على \perp)

إذن: $(a * b) \perp (a * b') = e$ (لأن e عنصر ماص للقانون الثاني $*$ في E حسب ما سبق).

ومنه: $a * b$ مماثل $a * b'$ بالنسبة للقانون \perp هو $a * b'$. أي $(a * b)' = a * b'$

خلاصة : $(a * b)' = a * b'$

• نبين أن : $a' * b = (a * b)'$

لدينا : $(a * b) \perp (a' * b) = (a * a') \perp b$

$$= e * b$$

$$= e$$

(لأن e عنصر ماص للقانون الثاني * في E حسب ما سبق).

ومنه : مماثل $a * b$ بالنسبة للقانون \perp هو $a' * b$. أي $(a * b)' = a' * b$.

خلاصة : $(a * b)' = a' * b$

• نبين أن : $a * b = (a * b)'$

لدينا : $(a)' * (b)' = [((a)' * (b)')] = [((a)') * b'] = [a * b]' = a * (b)' = a * b$

ومنه : $(a)' * (b)' = a * b$.

خلاصة : $a * b = (a * b)'$

D. العناصر القابلة للمماثلة ثم العناصر المنتظمة في حلقة واحدة :

. *éléments inversibles - éléments réguliers (ou simplifiables)*

1. تعريف :

ليكن $(E, \perp, *)$ حلقة واحدة (مع $E \neq \{e\}$ و e هو العنصر المحايد للقانون الأول \perp في E) .

• كل عنصر x من E له مماثل بالنسبة للقانون الثاني * يسمى عنصر قابل للمماثلة للحلقة E .

• كل عنصر x من E منتظم بالنسبة للقانون الثاني * يسمى عنصر منتظم للحلقة E .

2. ملحوظة : بالنسبة للقانون الثاني * . نرمز لمماثل a ب a^{-1} بدل من a'

3. أمثلة :

• $(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة تبادلية واحدة حيث $u = 1$ العنصر المحايد للقانون الثاني للضرب في \mathbb{Z} .

لدينا : مجموعة العناصر القابلة للمماثلة هي $U = \{-1, 1\}$. يمكنك أن تبين أن : زمرة تبادلية .

4. تمرين تطبيقي :

نأخذ التمرين السابق حيث :

لنعتبر الحلقة الواحدة $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ حيث

• $\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$

• $\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) \mp (a', b') = (aa', bb')$

1. بين أن : مجموعة العناصر القابلة للمماثلة هي $U = \{(-1, -1); (-1, 1); (1, -1); (1, 1)\}$

2. بين أن : زمرة تبادلية (U, \times) .

5. خاصية :

ليكن $(E, \perp, *)$ حلقة واحدة . U مجموعة العناصر القابلة للمماثلة .

• U جزء مستقر في $(E, *)$.

• $(U, *)$ زمرة .

6. برهان :

- نبين أن : U جزء مستقر في $(E, *)$.
- ليكن a و b من U حيث a^{-1} و b^{-1} مماثلين ل a و b من E بالنسبة للقانون الثاني * .
لدينا : $a*b \in U$ يقبل مماثل في $(E, *)$ هو $(a*b)^{-1} = y^{-1} * x^{-1}$ إذن $a*b \in U$.
- نبين أن : $(U, *)$ زمرة .
- لدينا : $(E, \perp, *)$ حلقة واحدة إذن * تجمعية في E و بالتالي * تجمعية في U .
- لدينا : u العنصر المحايد في $(U, *)$ لأن $u \in U$.
- ليكن x من U إذن يقبل مماثله x^{-1} هو عنصر من $(E, *)$. ومنه x^{-1} عنصر من U .

E. قواسم الصفر – الحلقة الكاملة : *Diviseurs de zéro - anneau intègre*

1. تعريف :

- لتكن $(E, \perp, *)$ حلقة . **e** العنصر المحايد للقانون الأول \perp في E .
- ليكن a و b من E نقول إن عنصرين a و b من E قاسمين للصفر إذا كان : $a*b = e$ ولكن $a \neq e$ و $b \neq e$.
 - $(E, \perp, *)$ حلقة كاملة إذا كان E لا يحتوي على قواسم الصفر . ($\forall a, b \in E : a*b = e \Rightarrow a = e$ أو $b = e$) .
- أو أيضا : أحد العوامل يساوي العنصر المحايد $e \Rightarrow$ مركب لعنصرين بالنسبة للقانون الثاني * منعدم .

2. أمثلة :

❖ مثال 1 :

$(\mathbb{Z}, +, \times)$ حلقة كاملة .

❖ مثال 2 :

لنعتبر الحلقة الواحدية $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ حيث

$$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$$

$$\forall (a, b), (a', b') \in \mathbb{Z}^2 : (a, b) \mp (a', b') = (aa', bb')$$

$$1. \text{ نبين أن : } D = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} / a = 0 \text{ أو } b = 0\}$$

$$2. \text{ هل } (\mathbb{Z}^2, +, \times) \text{ حلقة كاملة .}$$

جواب :

$$1. \text{ نبين أن : } D = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\} / a = 0 \text{ أو } b = 0\}$$

ليكن $(a, b) \neq (0, 0)$ قاسم للصفر إذن يوجد (a', b') من \mathbb{Z}^2 حيث $(a', b') \neq (0, 0)$ و $(a, b)(a', b') = (0, 0)$.

$$\text{لدينا : } (a, b)(a', b') = (0, 0) \Rightarrow (aa', bb') = (0, 0)$$

$$\Rightarrow aa' = 0 \text{ و } bb' = 0$$

وهذا ممكن فقط $a = 0$ أو $b = 0$.

عكسيا : كل زوج على شكل $(a, 0)$ مع $a \neq 0$ هو من قواسم للصفر لأنه لكل زوج $(0, b')$ مع $b' \neq 0$ لدينا :

$$(a, 0)(0, b') = (0, 0)$$

بنفس الطريقة : كل زوج على شكل $(0, b)$ مع $b \neq 0$ هو من قواسم للصفر .

خلاصة : $D = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} / a=0 \text{ أو } b=0\}$
 2. $(\mathbb{Z}^2, +, \times)$ ليست بحلقة كاملة لأنها تتوفر على قواسم للصفر.

❖ مثال 3 :

$(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +, \times)$ ليست بحلقة كاملة لأن $2 \times 6 = 0$ ولكن $2 \neq 0$ و $6 \neq 0$ (0 هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون الأول +).

❖ مثال 4 :

$(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ ليست بحلقة كاملة لأن $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ولكن $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ($\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ هو العنصر المحايد بالنسبة للقانون الأول +).

IV الجسم : Corps

❖ تعريف :

كل حلقة واحدة $(E, \perp, *)$ حيث كل عنصر من $E \setminus \{e\}$ قابل للمماثلة بالنسبة للقانون الثاني * تسمى جسم .
 (مع e العنصر المحايد للقانون الأول \perp في E)

❖ 2. ملحوظة :

❖ ملحوظة 1 :

في الغالب الجسم $(E, \perp, *)$ نستعمل K بدل E و + بدل ونسميه القانون الجمع \perp و \times بدل * ونسميه قانون الضرب . و بدل من كتابة $E \setminus \{e\}$ نكتب K^* .

❖ ملحوظة 2 :

$(E, \perp, *)$ جسم إذا كان :

- القانون الأول \perp له بنية زمرة تبادلية في E . (أي (E, \perp) زمرة تبادلية) .
- القانون الثاني * تجميعي في E .
- القانون الثاني * توزيعي على القانون الأول \perp في E .
- القانون الثاني * يتوفر على العنصر المحايد u (أي الوحدة)
- كل عنصر $x \neq e$ قابل للمماثلة (أي له مائل) بالنسبة للقانون الثاني * في E .

❖ ملحوظة 3 :

$(E, \perp, *)$ جسم إذا كان :

- القانون الأول \perp له بنية زمرة تبادلية في E . (أي (E, \perp) زمرة تبادلية) .
- القانون الثاني * توزيعي على القانون الأول \perp في E .
- القانون الثاني * له بنية زمرة في $E \setminus \{e\}$. (أي $(E \setminus \{e\}, *)$ زمرة)

❖ ملحوظة 4 :

$(E, \perp, *)$ حلقة واحدة هي جسم إذا وفقط إذا كان $U = E \setminus \{e\}$ (أي جميع عناصر E قابل للتماثل ماعد العنصر المحايد للقانون

الثاني *)

❖ ملحوظة 5 :

- إذا كان القانون الثاني * في E تبادلي فإن $(E, \perp, *)$ جسم تبادلي .
- إذا كان E مجموعة منتهية الجسم $(E, \perp, *)$ منتهية .

3. أمثلة :

مثال 1 : $(\mathbb{Z}, +, \times)$ ليست بجسم .

مثال 2 : $(\mathbb{Q}, +, \times)$ و $(\mathbb{R}, +, \times)$ و $(\mathbb{C}, +, \times)$ أجسام تبادلية .

مثال 3 : $(M_2(\mathbb{R}), +, \times)$ ليس بجسم لأن المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ غير قابلة للمائلة .

مثال 4 : $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +, \times)$ ليست بجسم لأن $U = \{1, 7, 11\} \neq \mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ أي $\bar{2}$ غير قابل للتماثل .

4. خاصية :

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ بجسم إذا وفقط إذا كان n عدد أولي .

5. العناصر المنتظم في جسم بالنسبة للقانون الثاني :

❖ خاصية :

$(E, \perp, *)$ جسم .

كل عنصر a من $E \setminus \{e\}$ فهو منتظم بالنسبة للقانون الثاني * .

❖ برهان :

بما أن $(E, \perp, *)$ جسم إذن كل عنصر من $E \setminus \{e\}$ فهو قابل للمماثل بالنسبة للقانون الثاني * و * تجمعي إذن a منتظم بالنسبة لهذا

القانون حسب خاصية (درس القوانين التركيب الداخلية) .

طريقة 2 :

ليكن a من $E \setminus \{e\}$ إذن a له مماثل بالنسبة ل * ليكن هو a^{-1} .

نبين أن a منتظم على اليمين وعلى اليسار أي نبين أن لكل x و y من E لدينا :

$$\left. \begin{aligned} (x * a = y * a) &\Rightarrow x = y \\ (a * x = a * y) &\Rightarrow x = y \end{aligned} \right\}$$

• نبين a منتظم على اليمين بالنسبة ل * . أي نبين أن : لكل x و y من E لدينا $(x \perp a = y \perp a) \Rightarrow x = y$

ليكن x و y من E حيث $x * a = y * a$ نبين أن $x = y$

بما أن : $x \perp a = y \perp a$ إذن $(x * a) * a^{-1} = (y * a) * a^{-1}$ (نركب ب a^{-1}) .

إذن : $x * (a * a^{-1}) = y * (a * a^{-1})$ (لأن * تجمعي)

ومنه : $x * u = y * u$ (لأن u هو الوحدة ل * أي العنصر المحايد ل *) . ومنه : $x = y$

و بالتالي a منتظم على اليمين بالنسبة ل * .

• بنفس الطريقة نبين أن منتظم على اليسار بالنسبة ل * .

❖ خلاصة : a منتظم على اليمين وعلى اليسار بالنسبة ل * . إذن a هو منتظم بالنسبة ل * .

6. خاصية :

$(E, \perp, *)$ جسم . حيث e العنصر المحايد بالنسبة ل \perp .

$$\forall a, b \in E \quad a * b = 0 \Rightarrow (a = e \text{ أو } b = e)$$

حالة : $(E, \perp, *) = (\mathbb{K}, +, \times)$ و $e = 0$ نحصل على : $\forall a, b \in E \quad a \times b = 0 \Rightarrow (a = 0 \text{ أو } b = e)$

- الجسم ليس له قواسم للصفر
- إذا كان $(E, \perp, *)$ جسم فإن $(E, \perp, *)$ حلقة كاملة (والعكس ليس دائما صحيح)
- إذا كان $(E, \perp, *)$ حلقة كاملة فإن $(E, \perp, *)$ ليس بجسم .

8. تمرين :

❖ **لنعتبر المعادلة $x \in E / a * x = b$ (1) في الجسم $(E, \perp, *)$ ؛ مع a و b معلومين من E .**

1. بين إذا كان $a = e$ و $b = e$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = E$

2. بين إذا كان $a = e$ و $b \neq e$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \emptyset$

3. بين إذا كان $a \neq e$ و $b = e$ فإن مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{a^{-1}b\}$

❖ **لنعتبر المعادلة $x \in E / a * x = b$ (1) في الجسم $(E, \perp, *)$ مع a و b معلومين من E .**

ناقش حسب قيم a و b مجموعة حلول المعادلة $x \in E / x * a = b$ (2) ؛ مع a و b معلومين من E .