التمرين 1 :

نعتبر في $\mathbb{R}^2$ قانون التركيب الداخلي * المعرف بما يلي :

لكل $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و لكل $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، نضع :

$$(a,b)*(x,y)=\left(\frac{ax+by}{2},\frac{bx+ay}{2}\right)$$

1. بين أن * قانون تركيب داخلي في المجموعة E.
2. ليكن التطبيق φ المعرف من $\mathbb{R}^*$ نحو E بما يلي :

$$\forall m\in\mathbb{R}^* \;:\; \varphi(m)=\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{R}^*,\times)$ نحو $(E,*)$.

ب- استنتج أن $(E,*)$ زمرة تبادلية محددا عنصرها المحايد ومماثل كل عنصر $\left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)$ حيث $m\in\mathbb{R}^*$.

3. نعتبر المجموعة :

$$F=\left\{\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x\geq 2\ \text{و}\ y^2=x^2-4\ \right\}$$

أ- بين أن :

$$F=\left\{\ \left(m+\frac{1}{m},m-\frac{1}{m}\right)\in\mathbb{R}^2\ /\ m>0\ \right\}$$

ب-بين أن $(F,*)$ زمرة جزئية من $(E,*)$.

التمرين 2 :

لتكن G مجموعة مصفوفات $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل $M_{(a,b)}=\begin{pmatrix}1&0\\a&b\end{pmatrix}$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$.

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية.

I. 1. بين أن G جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

2. بين أن $(G,\times)$ زمرة. هل هذه الزمرة تبادلية ؟

3. لتكن H مجموعة المصفوفات $M_{(a,b)}$ من G حيث $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$. بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(G,\times)$

4. ليكن A عنصرا من G حيث $A=\begin{pmatrix}1&0\\a&1\end{pmatrix}$ مع $a\in\mathbb{R}$.

نضع : $A^1=A$ و $A^{n+1}=A^n\times A$ لكل n من $\mathbb{N}^*$.

أحسب A^n بدلالة a و n حيث n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

II. نعتبر في $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ قانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

لكل $(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ و لكل $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ ، نضع :

$$(a,b)\top(x,y)=(a+bx,by)$$

وليكن φ التطبيق المعرف من G نحو $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$ بما يلي :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*\ ,\ \varphi\left(M_{(a,b)}\right)=(a,b)$$

1. بين أن φ تشاكل تقابلي من $(G,\times)$ نحو $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.
2. استنتج بنية $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$.
3. حدد مماثل $\underbrace{(a,1)T\,(a,1)T\,..T\,(a,1)}_{n\ \text{مـــــــــرة}}$ في $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*,\top)$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و n عدد صحيح طبيعي أكبر من أو يساوي 2.

التمرين 3 :

I. لتكن $E=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. لكل (a,b) من E^2 ، نضع :

$$a\perp b=a+b-ab\sqrt{2}$$

1. أ- تحقق من أن لكل (a,b) من E^2 ، لدينا :

$$a\perp b=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a\sqrt{2}-1\right)\left(b\sqrt{2}-1\right)$$

ب- استنتج أن $\perp$ قانون تركيب داخلي في E.

2. بين أن $(E,\perp)$ زمرة تبادلية.

II. تذكير: $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ هي مجموعة المصفوفات المربعة من الرتبة 2

✓ $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

✓ $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

لتكن $\mathcal{F}$ مجموعة المصفوفات من $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ التي تكتب على الشكل

$$M_{(a)}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-a&a\\a&\sqrt{2}-a\end{pmatrix}$$ ، حيث $a\in E$.

نضع : $A=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

1. أ- تحقق من أن : $A^2=-2A$

وأن : $M_{(a)}=I+\frac{a}{\sqrt{2}}A$.

ب- بين أن $\mathscr{F}$ جزء مستقر من $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\times\right)$.

2. نعتبر التطبيق :

$$\varphi : (E,\perp) \to (\mathscr{F},\times)$$
$$a \mapsto \varphi(a)=M_{(a)}$$

أ- بين أن φ تشاكل تقابلي من $(E,\perp)$ نحو $(\mathscr{F},\times)$.

ب- استنتج بنية $(\mathscr{F},\times)$.

التمرين 4 :

$\left(\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*),+,.\right)$ هو الفضاء المتجهي الحقيقي لمجموعة الدوال العددية المعرفة على $\mathbb{R}_+^*$.

لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$ ولكل x من $\mathbb{R}_+^*$، نضع :

$$f_{(a,b)}(x)=x^a e^{bx} \quad \text{و} \quad \varphi_{(a,b)}(x)=\ln\left(f_{(a,b)}(x)\right).$$

ولتكن المجموعة : $\mathscr{L} = \left\{ \varphi_{(a,b)} \ / \ (a,b)\in\mathbb{R}^2 \right\}$

1. بين أن $(\mathscr{L},+)$ زمرة جزئية من $\left(\mathscr{F}(\mathbb{R}_+^*),+\right)$.

2. أ- استنتج أنه لكل $\varphi_{(a,b)}$ من $\mathscr{L}$ ولكل λ من $\mathbb{R}$، لدينا : $\lambda\varphi_{(a,b)}\in\mathscr{L}$.

ب- استنتج أن $(\mathscr{L},+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

جـ- بين أن $\left(\varphi_{(1,0)},\varphi_{(0,1)}\right)$ أساس للفضاء المتجهي $(\mathscr{L},+,.)$ ثم حدد بعده.

التمرين 5 :

نعتبر المجموعة :

$$E = \left\{ (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x-y+2z=0 \right\}$$

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي.

2. ليكن $e_1=(1,1,0)$ و $e_2=(0,2,1)$.

أ- بين أن الأسرة (e_1,e_2) مولدة للفضاء المتجهي $(E,+,.)$.

ب- بين أن الأسرة (e_1,e_2) حرة؛ ثم استنتج $\dim E$.

التمرين 6 :

في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ؛ نعتبر المصفوفة : $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. تحقق من أن : $(A+3I)\times(A-I)=O$ حيث :

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. استنتج أن A قابلة للقلب في $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ وحدد A^{-1} .

3. أحسب A^2 بدلالة A و I .

4. بين أن : $\forall n\in\mathbb{N} : A^n=u_n.A+v_n.I$

حيث : $(A^0=I)$ ، $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتاليتان عدديتان معرفتان بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=0 & \text{و} & v_0=1 \\ u_{n+1}=-2u_n+v_n & ; & n\in\mathbb{N} \\ v_{n+1}=3u_n & ; & n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

5. نضع : $w_n=u_n+v_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أحسب w_{n+1} بدلالة w_n ، ثم استنتج w_n بدلالة n .

6. استنتج u_{n+1} بدلالة u_n .

7. حدد u_n بدلالة n ، ثم v_n بدلالة n .

8. أحسب A^n بدلالة n .

التمرين 7 :

نعتبر المجموعة :

$$E=\left\{ \begin{array}{l} f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad / \\ \forall x\in\mathbb{R} : f(x)=A(x)\cos x+B(x)\sin x \end{array} \right\}$$

حيث A و B حدوديتان درجتهما أصغر من أو تساوي 1 .

1. بين أن $(E,+,.)$ فضاء متجهي حقيقي .

2. نعتبر الأسرة $B=(f_1,f_2,f_3)$ حيث :

$$f_1(x)=\cos x \quad \text{و} \quad f_2(x)=\sin x$$
$$\text{و} \quad f_3(x)=x\cos x$$

بين أن B أساس للفضاء $(E,+,.)$.

3. ليكن $a\in\mathbb{R}$. نعتبر الدالتين g و h بحيث :

$$\begin{cases} g(x)=\cos(a+x) \\ h(x)=\sin(a+x) \end{cases} .$$

أ- تأكد من أن $(h,g)\in E^2$ ثم حدد إحداثيات g و h بالنسبة للأساس B .

ب- هل الأسرة $B'=(g,h,f_3,f_4)$ أساس لـ $(E,+,.)$ ؟

f_4 هي الدالة المعرفة بما يلي : $f_4(x)=x\sin x$.

التمرين 8 :

لتكن $\mathscr{M}$ مجموعة المصفوفات M من $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث :

$$2M^2-3M+I_2=0_2$$

حيث : $O_2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ و $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

1. لتكن M مصفوفة من $\mathscr{M}$.

نضع : $E=2(I_2-M)$ و $F=2M-I_2$

أ- بين أن : $E\times F=O_2$.

ب- بين أن : $E^2=E$ و $F^2=F$.

جـ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ M^n=\frac{1}{2^n}E+F$.

2. نعتبر المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفتين بما يلي : $\begin{cases} x_0=y_0=1 \\ x_{n+1}=3x_n-10y_n\ ;\ n\in\mathbb{N} \\ y_{n+1}=\frac{1}{2}x_n-\frac{3}{2}y_n\ ;\ n\in\mathbb{N}\end{cases}$.

أ- بين أن المصفوفة $A=\begin{pmatrix}3&-10\\ \frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ تنتمي إلى $\mathscr{M}$.

ب- نضع : $X_n=\begin{pmatrix}x_n\\y_n\end{pmatrix}$.

بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ X_{n+1}=A\,.\,X_n$

جـ- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ X_n=A^n.X_0$.

د- حدد تعبيري x_n و y_n بدلالة n .

هـ- أدرس تقارب المتتاليتين العدديتين $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

التمرين 9 :