التمرين الأول

نعتبر المجموعة $E=\left\{M=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a+b \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ و نضع $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

1) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$
2) أكتب J^2 بدلالة I , J
3) بين أن E جزء مستقر في $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),\times)$
4) استنتج أن $(E,+,\times)$ حلقة . هل هي واحدية ؟ تبادلية ؟

التمرين الثاني

نعتبر المجموعة $E=\left\{M=\begin{pmatrix} a+b & 3a \\ 0 & b-2a \end{pmatrix} / (a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$ ونرمز ب I للمصفوفة الواحدية و θ

ونضع $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

1) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+)$
2) أحسب A^2 وأكتبها بدلالة I , A
3) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية
4) هل $(E,+,\times)$ كاملة ؟
5) حدد المصفوفات M من E و التي تقبل مقلوب M^{-1} وأكتب M^{-1} بدلالة I , A

التمرين الثالث

ليكن $(A,+,\times)$ حلقة و بحيث $x^2=x$ $(\forall x\in A)$

1) بين أن $xy+yx=0_A$ $\left(\forall (x,y)\in A^2\right)$
2) بين أن $x+x=0_A$: $\forall x\in A$
3) بين أن الحلقة $(A,+,\times)$ تبادلية
4) بين أن العلاقة $\leq$ المعرفة على A بما يلي : $x\leq y \Leftrightarrow yx=x$ علاقة ترتيب
5) بين أن $xy(x+y)=0_A$ $\left(\forall (x,y)\in A^2\right)$
6) استنتج أن $A=\{0_A,1\}$

التمرين الرابع

لتكن A من $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ و غير منعدمة و نعتبر المجموعة E للمصفوفات M من $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ بحيث : $MA=AM$

1) بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية
2) نأخذ $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و نضع $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

أ- أكتب M بدلالة a , b

ب- نضع $M^0=I$ و $M^n=M^{n-1}\times M$ لكل n من $\mathbb{N}^*$ بين أن $M^n=\begin{pmatrix} a^n & (a+b)^n-a^n \\ 0 & (a+b)^n \end{pmatrix}$ $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$

ج- حدد عناصر E و التي تقبل مقلوب في E

التمرين الخامس

$$f_{(a,b)} : \mathrm{P} \to \mathrm{P}$$

ليكن (a,b) من $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$ نعتبر التطبيق : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to M'\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} : \begin{cases} x' = ax \\ y' = bx + \frac{1}{a}y \end{cases}$

1) نضع $E = \left\{ f_{(a,b)} \ / \ (a,b) \in \mathbb{R}^*\times\mathbb{R} \right\}$ بين أن $(E,\circ)$ زمرة .

2) نعتبر المجموعتين $H = \left\{ f_{(a,0)} \ / \ a \in \mathbb{R}^* \right\}$ و $K = \left\{ f_{(1,b)} \ / \ b \in \mathbb{R} \right\}$

أ- بين أن H و K زمرتان جزئيتان من $(E,\circ)$

ب- بين أن $(H,\circ)$ متشاكلة مع $(\mathbb{R}^*,\times)$

ج- بين أن $(K,\circ)$ متشاكلة مع $(\mathbb{R},+)$

التمرين السادس

نعتبر في حلقة المصفوفات $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ المجموعة $E = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} 2^a & 0 \\ a2^a & 2^a \end{pmatrix} / a \in \mathbb{Z} \right\}$

و نعتبر التطبيق φ المعرف بما يلي : $\begin{aligned} \varphi\ \mathbb{Z} &\to E \\ x &\to M_x \end{aligned}$

1) بين أن f تشاكل من $(\mathbb{Z},+)$ إلى $(E,\times)$

2) استنتج بنية $(E,\times)$

3) أحسب $(M_a)^n$ لكل a , n من $\mathbb{Z}$

4) نضع $F = \left\{ M_a^n \times M_b^m \ / \ (n,m) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

أ- بين أن $(F,\times)$ زمرة جزئية من الزمرة $(E,\times)$

ث- ليكن c عدد من $\mathbb{Z}$ بين أن : $M_c \in F \Leftrightarrow a\wedge b | c$

ج- بين أن $E = F \Leftrightarrow a\wedge b = 1$

التمرين السابع

نعتبر الحلقة الواحدية $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ و الفضاء الحقيقي $(\mathrm{M}_3(\mathbb{R}),+,\cdot)$ حيث أن θ المصفوفة المنعدمة

و I الوحدة ونعتبر المصفوفة $A = \begin{pmatrix} -1 & b & b \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ حيث bعدد حقيقي غير منعدم و نضع $B = A + I$

1) أ- أحسب B^2 ; B^3

ب- تحقق أن $(I-B)(I+B+B^2) = I$

ج- استنتج أن A تقبل مقلوب A^{-1} ثم حدد A^{-1}

2) ليكن E الفضاء الحقيقي المولد بالأسرة (I,B,B^2)

أ- بين أن (I,B,B^2) أسرة حرة

ب- استنتج أن (I,B,B^2) أساس للفضاء E و حدد بعده