الزمرة – الحلقة - الجسم

تمرين 1

نعتبر : $E =]-1;1[$

ليكن : $(x;y) \in E^2$

نضع : $x * y = \dfrac{x+y}{1+xy}$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- لنبين أن : * قانون تركيب داخلي في E

نعتبر : $y \in E$

نعتبر الدالة : $f_y(x) = \dfrac{x+y}{1+xy}$ معرفة على $E =]-1;1[$

$$f_y'(x) = \frac{1-y^2}{(1+xy)^2}$$

بما أن : $y \in]-1;1[$ فإن : $\forall x \in]-1;1[\ : f_y'(x) > 0$

إذن : f_y تزايدية على $]-1;1[$

$$f_y(]-1;1[) =]-1;1[$$

و منه : $f_y(x) \in E \quad \forall x \in E \ ; \ \forall y \in E$

يعني : $\boxed{\forall (x;y) \in E^2 \quad x * y \in E}$

إذن : * قانون تركيب داخلي في E

2- لنبين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

أ- لنبين أن : * تجميعي

نعتبر : $(x;y;z) \in E^3$

$$(x*y)*z = \frac{x+y}{1+xy} * z$$

$$= \frac{\dfrac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \dfrac{x+y}{1+xy} \times z}$$

$$(x*y)*z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$$

كذلك : $x*(y*z) = \dfrac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}$

إذن : $\boxed{(x*y)*z = x*(y*z)}$

و منه : * تجميعي

ب- لنبين أن : * تبادلي

نعتبر : $(x;y) \in E^2$

لدينا :

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{y+x}{1+yx}$$

إذن : $\boxed{x * y = y * x}$

و منه : * تبادلي

ج- لنبين أن * يقبل عنصرا محايدا ثم نحدده

نعتبر : $e \in E$ بحيث :

بحيث : $\forall x \in E \quad x * e = e * x = x$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد e بحيث : $x * e = x$

Abouelouafa Lakhouaja

$$x*e=x \Leftrightarrow \frac{x+e}{1+xe}=x$$
$$\Leftrightarrow x+e=x+x^2e;\ \forall x\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow e=x^2e$$
$$\Leftrightarrow e\left(1-x^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow e\left(1-x^2\right)=0;\ \forall x\in E$$
$$\Leftrightarrow \boxed{e=0}$$

إذن : * يقبل عنصرا محايدا و هو 0

د- لنبين أن جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

نعتبر : $x\in E$

y مماثل لـ x يعني : $x*y=y*x=0$

بما أن * تبادلي يكفي تحديد y بحيث : $x*y=0$

$$x*y=0 \Leftrightarrow \frac{x+y}{1+xy}=0$$
$$\Leftrightarrow x+y=0$$
$$\Leftrightarrow y=-x$$

بما أن : $-x\in E$

إذن : جميع عناصر E تقبل مماثلا بالنسبة للقانون * في E

إذن : من - أ- ب – ج – د - $(E;*)$ زمرة تبادلية

تمرين2

نعتبر : $E=\left\{(x;y)\in\mathbb{R}^2\ /\ x^2-y^2=1\right\}$

ليكن : $(x;y)\in E^2$ و $(x';y')\in E^2$

نضع : $(x;y)*(x';y')=(xx'+yy';xy'+yx')$

1- بين أن : * قانون تركيب داخلي في E

2- بين أن : $(E;*)$ زمرة تبادلية

الحل

1- * قانون تركيب داخلي في E (الحساب)

2- التجميعية و التبادلية évident

العنصر المحايد :

$$(x;y)*(e_x;e_y)=(xe_x+ye_y;xe_y+ye_x)=(x;y)$$
$$\begin{cases}xe_x+ye_y=x\\ xe_y+ye_x=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2e_x+xye_y=x^2\\ xye_y+y^2e_x=y^2\end{cases}$$
$$\begin{cases}e_x\left(x^2-y^2\right)=x^2-y^2\\ xe_x+ye_y=x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e_x=1\\ x+ye_y=x\end{cases}$$
$$\begin{cases}e_x=1\\ e_y=0\end{cases}$$

إذن : $(1;0)$ هو العنصر المحايد بالنسبة * في E

مماثل $(x;y)$

أ- $x\neq 0$

$$(xx'+yy';xy'+yx')=(1;0)$$
$$\begin{cases}xx'+yy'=1\\ xy'+yx'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2x'+xyy'=x\\ xyy'+y^2x'=0\end{cases}$$
$$\begin{cases}x'\left(x^2-y^2\right)=x\\ xy'+yx'=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\ xy'+yx=0\quad x\neq 0\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x'=x\\ y'=-y\end{cases}$$

مماثل $(x;y)$ هو $(x;-y)$

ب- الحالة : $x=0$ إذن : $y=1$ أو $y=-1$

$$(xx'+yy';xy'+yx')=(1;0)$$
$$\begin{cases}yy'=1\\ yx'=0\quad y\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y'=\dfrac{1}{y}\\ x'=0\end{cases}$$

مماثل $(0;1)$ هو $(0;1)$ و مماثل $(0;-1)$ هو $(0;-1)$

تمرين3

$(G;\times)$ زمرة غيرتبادلية (العنصرالمحايدا هو e)

(مماثل a هو a^{-1})

نعتبر : $C=\left\{a\in G\ /\ \forall x\in G\quad xa=ax\right\}$

بين أن : $(C;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

الحل

لنبين أن : $\forall(a;b)\in C\quad ab^{-1}\in C$

نعتبر : $x\in G$

$$ab^{-1}x=a\left(x^{-1}b\right)^{-1}$$
$$b\in C\Rightarrow x^{-1}b=bx^{-1}$$
$$ab^{-1}x=a\left(bx^{-1}\right)^{-1}=axb^{-1}$$
$$a\in C\Rightarrow ax=xa$$
$$\forall(a;b)\in C\quad \forall x\in G\quad ab^{-1}x=xab^{-1}$$

إذن : $\boxed{\forall(a;b)\in C\quad ab^{-1}\in C}$

ومنه : $(C;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

لدينا : $1_G\in C$ لإن : $x1_G=1_Gx$ $\forall x\in G$

إذن : $C\neq\varnothing$

Abouelouafa Lakhouaja

تمرين 4

$(G;\times)$ زمرة $a\in G$

نعتبر : $H_a=\left\{x\in G \;/\; xa=ax\right\}$

بين أن : $(H_a;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

الحل

لنبين أن : $\forall (x;y)\in H_a^2 \quad xy^{-1}\in H_a$

$$x\in H_a \Leftrightarrow xa=ax \Leftrightarrow a^{-1}x=xa^{-1}$$

$$y\in H_a \Leftrightarrow ya=ay \Leftrightarrow a^{-1}y=ya^{-1}$$

$$xy^{-1}a=x\left(a^{-1}y\right)^{-1}=x\left(ya^{-1}\right)^{-1}=xay^{-1}=axy^{-1}$$

إذن : $\forall (x;y)\in H_a^2 \quad xy^{-1}a=axy^{-1}$

ومنه : $\forall (x;y)\in H_a^2 \quad xy^{-1}\in H_a$

إذن : $(H_a;\times)$ زمرة جزئية للزمرة $(G;\times)$

تمرين5

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix} \;/\; x\in\mathbb{R}\right\}$$

نعتبر التطبيق :

$$f:(\mathbb{R};+)\to(E;\times)$$
$$x\mapsto\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$$

1- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

3- استنتج بنية المجموعة $(E;\times)$

4- نعتبر : $M=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

احسب : $M^2\ ;\ M^3$ ثم استنتج M^n

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$

و $\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}\in E$

إذن : $\forall\left(\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix};\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}\in E$$

و منه : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2- لنبين أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

نعتبر : $(x;y)\in\mathbb{R}^2$

$$f(x+y)=\begin{pmatrix}\cos(x+y) & -\sin(x+y)\\ \sin(x+y) & \cos(x+y)\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos x\cos y-\sin x\sin y & -\cos x\sin y-\sin x\cos y\\ \sin x\cos y+\cos x\sin y & -\sin x\sin y+\cos x\cos y\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\cos y & -\sin y\\ \sin y & \cos y\end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(x+y)=f(x)\times f(y)}$$

إذن : f تشاكل من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

و لدينا : $\forall\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}\in E\ \exists x\in\mathbb{R}/f(x)=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(\mathbb{R};+)$ نحو $(E;\times)$

و $(\mathbb{R};+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;\times)$ زمرة تبادلية

4- نعتبر : $M=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$

حساب : $M^2\ ;\ M^3$ ثم استنتاج M^n

من : $f(x+y)=f(x)\times f(y)$

نبين بالترجع أن : $f(nx)=\left(f(x)\right)^n$

إذن : $\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}\cos nx & -\sin nx\\ \sin nx & \cos nx\end{pmatrix}$

تمرين6

نعتبر :

$$E=\left\{\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} \;/\; (a;b)\in\mathbb{R}^2;(a;b)\neq(0;0)\right\}$$

Abouelouafa Lakhouaja

نعتبر التطبيق :

$$\begin{aligned} f: \quad & E \to \mathbb{C}^* \\ & \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mapsto a+ib \end{aligned}$$

1- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2 - بين أن : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

4- استنتج بنية المجموعة $(E;\times)$

الحل

1- لنبين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$$

و $\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}\in E$

إذن : $\forall\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\in E$$

ومنه : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

2 - لنبين أن : f تقابل

نعتبر : $\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix};\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)\in E^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow a+ib=c+id \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)=f\left(\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}}$$

إذن : f تباين (a)

نعتبر : $c+id\in\mathbb{C}^*$

لنحدد : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\in E$ بحيث : $f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)=c+id$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)=c+id \Leftrightarrow a+ib=c+id$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\right)=c+id \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}$$

إذن : f شمولي (b)

من : (a) و (b) : f تقابل

3- بين أن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)=f\begin{pmatrix} ac-bd & -(bc+ad) \\ bc+ad & ac-bd \end{pmatrix}$$
$$=(ac-bd)+i(bc+ad)$$

$$\boxed{f\left(\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\right)=(a+bi)(c+di)}$$

إذن : f تشاكل من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

4- استنتاج بنية المجموعة $(E;\times)$

بما أن : f تشاكل تقابلي من $(E;\times)$ نحو $(\mathbb{C}^*;\times)$

فإن : f^{-1} تشاكل من $(\mathbb{C}^*;\times)$ نحو من $(E;\times)$

و بما أن : $(\mathbb{C}^*;\times)$ زمرة

فإن : $(E;\times)$ زمرة

ملاحظة

(مماثل $a+ib$ في $(\mathbb{C}^*;\times)$ هو $\frac{a}{a^2+b^2}-i\frac{b}{a^2+b^2}$)

(مماثل $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ في $(E;\times)$ هو $\begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} & \frac{b}{a^2+b^2} \\ -\frac{b}{a^2+b^2} & \frac{a}{a^2+b^2} \end{pmatrix}$)

العنصر المحايد في $(\mathbb{C}^*;\times)$ هو 1

العنصر المحايد في $(E;\times)$ هو $f^{-1}(1)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

تمرين7

$(G;*)$ زمرة العنصر المحايد هو e (مماثل a هو a^{-1})

التطبيق f_a معرف بما يلي :
$$\begin{aligned} f_a: & G\to G \\ x & \mapsto a*x*a^{-1} \end{aligned}$$

نعتبر : $F=\{f_a \,/\, a\in G\}$

نعتبر التطبيق :
$$\begin{aligned} f: & G\to F \\ a & \mapsto f_a \end{aligned}$$

1- بين أن $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathscr{F};\circ)$

2- بين أن : f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

3 - استنتج بنية المجموعة $(F;\circ)$

الحل

Abouelouafa Lakhouaja

1 - لنبين أن : $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathscr{F};\circ)$

يعني : $\forall(a;b)\in G^2\ \ f_a\circ f_b\in F$

نعتبر : $x\in G$

$f_a\circ f_b(x)=a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}$

بما أن : * تجميعي و $(a*b)^{-1}=b^{-1}*a^{-1}$

فإن : $a*(b*x*b^{-1})*a^{-1}=(a*b)*x*(a*b)^{-1}$

إذن : $\forall x\in G\ \ f_a\circ f_b(x)=f_{a*b}(x)$

و منه : $\boxed{\forall(a;b)\in G^2\ \ f_a\circ f_b=f_{a*b}}$

وبما أن : * قانون تركيب داخلي في G

فإن : $a*b\in G$

إذن : $f_{a*b}\in F$

و منه : $f_a\circ f_b\in F$

إذن : $\forall(a;b)\in G^2\ \ f_a\circ f_b\in F$

و منه : $(F;\circ)$ جزء مستقر من $(\mathscr{F};\circ)$

2- لنبين أن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

نعتبر : $(a;b)\in G^2$

لدينا : $f(a*b)=f_{a*b}$

إذن : $f(a*b)=f_a\circ f_b$

إذن : f تشاكل من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$ (a)

- لنبين أن : f شمولي

لدينا : $\forall f\in F\ \ \exists a\in E\ \ f(a)=f_a$

إذن : f شمولي (b)

ومن : (a) و (b)

f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

3- استنتاج بنية المجموعة $(F;\circ)$

بما أن : f تشاكل شمولي من $(G;*)$ نحو $(F;\circ)$

و $(G;*)$ زمرة

فإن : $(F;\circ)$زمرة

ملاحظة

العنصر المحايد في $(G;*)$ هو e

العنصر المحايد في $(F;\circ)$ هو $f(e)=f_e$

مماثل a في $(G;*)$ هو a^{-1}

مماثل f_a في $(F;\circ)$ هو $f(a^{-1})=f_{a^{-1}}$

تمرين 8

بين أن : $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

بحيث : $\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x';y')\in\mathbb{Z}^2$

$(x;y)+(x';y')=(x+x';y+y')$

$(x;y)\times(x';y')=(xx'+2yy';xy'+yx')$

الحل

أ- $(\mathbb{Z}^2;+)$ زمرة تبادلية (واضح)

صفر $(\mathbb{Z}^2;+)$ هو $(0;0)$ مماثل $(x;y)$ هو $(-x;-y)$ في $(\mathbb{Z}^2;+)$

ب - $\times$ تجميعي في $\mathbb{Z}^2$ (الحساب)

ج - $\times$ تبادلي في $\mathbb{Z}^2$ (الحساب)

د - وحدة $(\mathbb{Z}^2;\times)$ هي $(1;0)$

هـ - القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{Z}^2$

بما أن $\times$ تبادلي في $\mathbb{Z}^2$

نكتفي بالبرهنة أن :

$\forall(x;y)\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x';y')\in\mathbb{Z}^2$ و $\forall(x'';y'')\in\mathbb{Z}^2$

$(x;y)\times((x';y')+(x'';y''))=((x;y)\times(x';y'))+((x;y)\times(x'';y''))$

(كذلك الحساب)

من (أ- ب – ج – د - هـ) $(\mathbb{Z}^2;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

تمرين9

1- بين أن : $1+j+j^2=0$ بحيث : $j=e^{2i\frac{\pi}{3}}$

2- نعتبر : $E=\{z\in\mathbb{C}/\exists(a;b)\in\mathbb{R}^2\ :\ z=a+bj\}$

بين أن : $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

الحل

أ- $(E;+)$ زمرة تبادلية (واضح)

طريقة البرهنة أن : $(E;+)$ زمرة تبادلية

نبين أن : $(E;+)$ زمرة تبادلية مباشرة

أو من الأحسن نبين أن : $(E;+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{C};+)$

و بما أن : $(\mathbb{C};+)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E;+)$ زمرة تبادلية

ب - $\times$ قانون تركيب داخلي في E (الحساب و العلاقة $1+j+j^2=0$)

بما أن $(\mathbb{C};+;\times)$ جسم تبادلي و $E\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في E

فإن : ج - $\times$ تجميعي في في E (الحساب)

د - $\times$ تبادلي في في E (الحساب)

ج - وحدة $(E;\times)$ هي 1

هـ - القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E

Abouelouafa Lakhouaja

من (أ- ب – ج – د – هـ) $(E;+;\times)$ حلقة تبادلية واحدية

تمرين 10

بين أن : $(\mathbb{R};*;\mathrm{T})$ جسم تبادلي

$$\forall (x;y)\in\mathbb{R}^2\ \begin{cases} x*y=x+y-1\\ x\,\mathrm{T}y=x+y-xy\end{cases}$$

الحل

أ - $(\mathbb{R};*)$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R};*)$ هو 1

ب- $(\mathbb{R}-\{1\};\mathrm{T})$ زمرة تبادلية (الحساب)

العنصر المحايد في $(\mathbb{R};\mathrm{T})$ هو 0

ج - القانون T توزيعي بالنسبة للقانون $*$ في $\mathbb{R}$ (الحساب)

بما أن T تبادلي في $\mathbb{R}$

نكتفي بالبرهنة أن :

$$\forall(x;y;z)\in\mathbb{R}^3\quad x\,\mathrm{T}(y*z)=(x\,\mathrm{T}y)*(x\,\mathrm{T}z)$$

من (أ- ب – ج) $(\mathbb{R};*;\mathrm{T})$ جسم تبادلي

تمرين11

نعتبر :

$$\mathbb{K}=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix}\ /\ (x;y)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

بين أن : $(\mathbb{K};+;\times)$ جسم تبادلي

الحل

1- $(\mathbb{k};+)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

- بما أن : $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$ زمرة تبادلية و $\mathbb{k}\subset\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$

يكفي ان نبين أن : $(\mathbb{k};+)$ زمرة جزئية من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+)$

و منه : $(\mathbb{k};+)$ زمرة تبادلية

العنصر المحايد في $(\mathbb{k};+)$ هو $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$

2- $\left(\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\};\times\right)$ زمرة تبادلية (الطريقة)

أ- $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{k}$ (الحساب)

$$\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\-5b&a+2b\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}xa-5yb & xb+ya+2yb\\ -5(xb+ya+2yb) & (xa-5yb)+2(xb+ya+2yb)\end{pmatrix}$$

ب - $\times$ تبادلي في $\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$ (الحساب)

- بما أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة واحدية و $\mathbb{k}\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{k}$

فإن : ج- $\times$ تجميعي في $\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

د- وحدة $\left(\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\};\times\right)$ هي $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=1_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}$

هـ - لنبين أن جميع عناصر $\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$ تقبل مماثلا في $\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

بما أن $\times$ تبادلي في $\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

نكتفي بتحديد : $\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix}\in\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\}$

بحيث : $\begin{pmatrix}x&y\\-5y&x+2y\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a&b\\-5b&a+2b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

نجد : $\begin{cases}xa-5yb=1\\ xb+ya+2yb=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ax-5by=1\\ bx+(a+2b)y=0\end{cases}$

$$5b^2+2ab+a^2\neq 0$$

لأن : $\Delta_b'=-4a^2<0$ و $\Delta_a'=-4b^2<0$

حل النظمة نجد : $\begin{cases}x=\dfrac{a+2b}{5b^2+2ab+a^2}\\[2mm] y=\dfrac{-b}{5b^2+2ab+a^2}\end{cases}$

من (أ- ب – ج – د – هـ) $\left(\mathbb{k}-\{0_{\mathbb{M}_2(\mathbb{R})}\};\times\right)$ زمرة تبادلية

3- القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{k}$

بما أن $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});+;\times)$ حلقة واحدية و $\mathbb{k}\subset\mathbb{C}$ و $\times$ قانون تركيب داخلي في $\mathbb{k}$ فإن القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في $\mathbb{k}$

من (1- 2 – 3) $(\mathbb{K};+;\times)$ جسم تبادلي

تمرين12 (الإستدراكية 2003)

نعتبر : $M_{(a;b)}=\begin{pmatrix}a&b\sqrt{2}\\ b\sqrt{2}&a\end{pmatrix}\ /\ (a;b)\in\mathbb{Z}^2$

$$E=\left\{M_{(a;b)}\ /\ a^2-2b^2=1\right\}$$

$$A=\begin{pmatrix}3&2\sqrt{2}\\2\sqrt{2}&3\end{pmatrix}$$

1 – تحقق أن : $A\in E$

2- بين أن : E جزء مستقر من $(\mathbb{M}_2(\mathbb{R});\times)$

و أن قانون التركيب الداخلي $\times$ تبادلي في E

3- بين أن : جميع عناصر E تقبل مقلوبا في E بالنسبة لقانون التركيب الداخلي $\times$

4- بين أن : $(E;\times)$ زمرة تبادلية