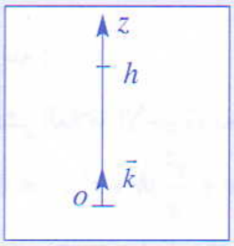
تمرين 1 سقوط جسمين من نفس الموضع



نهمل الاحتكاكات ونأخذ $g = 9,8m.s^{-2}$

نحرر جسما (S_1) من ارتفاع h عن سطح الأرض بدون سرعة بدئية عند لحظة $t = 0$ وبعد ثانيتين، نحرر جسما آخر (S_2) في نفس الظروف السابقة، من نفس الموضع، وبدون سرعة بدئية.

ما هي المسافة التي تفصل بين الجسمين بعد مرور $4s$ عن تحرير الجسم (S_1) ؟

حل

أصل معلم الفضاء : النقطة O الموجودة على سطح الأرض.

أصل معلم الزمان : لحظة تحرير الجسم .

المعلم المستعمل : $(O,\vec{k})$ محوره Oz موجه نحو الأعلى.

باعتبار أن السقوط حر، تكتب المعادلات الزمنية لحركة (S_1) كالتالي :

$$a_1 = -g \;;\; v_1 = -g.t \;;\; z_1 = -\frac{1}{2}g.t^2 + h$$

المعادلات الزمنية لحركة (S_2) .

$$a_2 = -g \;;\; v_2 = -g(t-2) \quad z_2 = -\frac{1}{2}g(t-2)^2 + h$$

$t' = t - 2$ لأن (S_2) حرر بعد مرور $2s$ على تحرير (S_1) .

المسافة الفاصلة بين الجسمين (S_1) و (S_2) هي : $d = z_2 - z_1$: لأن $z_2 > z_1$

أي أن : $d = -\frac{1}{2}g(t^2 - 4t + 4) + h + \frac{1}{2}gt^2 - h$

يعني : $d = -\frac{1}{2}gt^2 + 2gt - 2g + h + \frac{1}{2}gt^2 - h$

إذن : $d = 2g(t-1)$

بعد مرور $t = 4s$ تكون المسافة الفاصلة بين موضعي الجسمين هي : $d = 2.9,8.(4-1) = 58,8m$

تمرين 2 قياس عمق بئر

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 9,8m.s^{-2}$

لمعرفة عمق بئر، نحرر جسما بدون سرعة بدئية، عند اللحظة $t = 0$، ليسقط داخل البئر، ونقيس المدة الزمنية t الفاصلة بين بداية السقوط ولحظة سماع اصطدام الجسم بالماء.

أعطى هذا القياس، بالنسبة لبئر، $t = 5s$.

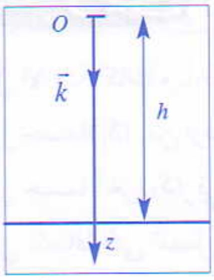
احسب العمق h للبئر، علما أن سرعة انتشار الصوت في الهواء هي : $v = 330m.s^{-1}$ وأن : $h < 200m$.

حل

باعتبار النقطة O التي تنتمي إلى سطح الأرض، أصلا لمعلم الفضاء $(O,\vec{k})$ محوره Oz موجه نحو الأسفل، ولحظة تحرير الجسم انطلاقا من النقطة O، أصلا للتواريخ، تكتب المعادلات الزمنية لحركة الجسم كالتالي : $a_z = g \;;\; v_z = gt \;;\; z = \frac{1}{2}gt^2$

يصطدم الجسم بالماء عند اللحظة t_1 وذلك بعد قطع المسافة h التي تمثل عمق البئر، ومنه : $h = \frac{1}{2}g.t_1^2$

يستغرق الصوت، ليصل إلى أذن المجرب، المدة $t_2 = \frac{h}{v}$ مع $t = t_1 + t_2$



ومنه : $h = \frac{1}{2} g.t_1^2 = \frac{1}{2} g(t - t_2)^2 = \frac{1}{2} g(t - \frac{h}{v})^2$

بنشر العلاقة الأخيرة، نحصل على معادلة من الدرجة الثانية على شكل :

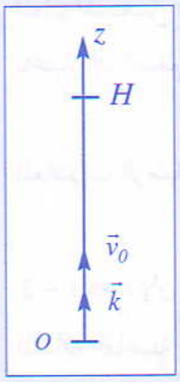
$h^2 - 2(t.v + \frac{v^2}{g})h + t^2.v^2 = 0$ أي : $h^2 - 2,55.10^4 h + 2,72.10^6 = 0$

بحل هذه المعادلة نجد أن : $h = 101m$.

تمرين 3

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10m.s^{-2}$

عند اللحظة $t = 0$، نرسل كرية (b_1) رأسيا نحو الأعلى بسرعة $v_0 = 8m.s^{-1}$ ، انطلاقا من نقطة O، أصل المعلم الرأسي $(O,\vec{k})$.
تصعد الكرية (b_1) رأسيا وفق المحور (Oz) إلى أن تصل إلى أعلى نقطة H (انظر الشكل جانبه)



1 ـ اكتب المعادلة الزمنية $z_1(t)$ لحركة (b_1) ،واحسب المدة الزمنية t_H المستغرقة خلال الصعود.

2 ـ احسب الارتفاع الأقصى الذي تصل إليه الكرية (b_1) .

3 ـ عند اللحظة $t=1s$ ، نرسل كرية (b_2) في نفس الظروف انطلاقا من الأصل O وبنفس السرعة $\vec{v}_0$ ؛
أوجد المعادلة الزمنية $z_2(t)$ لحركة (b_2) باختيار أصل التواريخ $(t = 0s)$ لحظة إرسال الكرية (b_1) .

4 ـ عند اللحظة t_C تلتقي الكريتان (b_1) و (b_2) في نقطة C من المحور Oz.
حدد اللحظة t_C والأنسوب z_C للنقطة C.

حل

1 ـ المعادلات الزمنية لحركة (b_1) ومدة الصعود

باعتبار أن السقوط حر، تكتب المعادلات الزمنية لحركة الكرية (b_1) في المعلم $(O,\vec{k})$ كالتالي :

$$a_1 = -g \quad ; \quad v_1 = -g.t + v_0 \quad ; \quad z_1 = -\frac{1}{2} g.t^2 + v_0 t$$

ـ المعادلة الزمنية $z_1(t)$

$$z_1(t) = -\frac{1}{2} g.t^2 + v_0 t = -5t^2 + 8t$$

ـ مدة الصعود

ـ عند النقطة H تنعدم سرعة الكرية (b_1) ومنه : $v_1 = -10t_H + 8 = 0$ إذن : $t_H = 0,8s$

2 ـ حساب الارتفاع الأقصى

الارتفاع الأقصى هو المسافة h المقطوعة من طرف الكرية (b_1) .

تتوقف الكرية عند النقطة H، إذن الارتفاع الأقصى هو $z_H = h = OH$

ومنه : $h = -5t_H^2 + 8t_H = -5(0,8)^2 + 8(0,8) = 3,2m$

3 ـ المعادلات الزمنية لحركة (b_2) في المعلم $(O,\vec{k})$

$$a_2 = -g \quad , \quad v_2 = -g(t-1) + v_0 \quad , \quad z_2 = -\frac{1}{2} g(t-1)^2 + v_0(t-1)$$

$t' = t - 1$ لأن الكرية (b_2) أرسلت بعد مرور $1s$ على إرسال (b_1).

المعادلة الزمنية $z_2(t)$

$$z_2(t) = -5(t-1)^2 + 8(t-1) = -5t^2 + 18t - 13$$

4 ـ لحظة التقاء الكريتين والأنسوب الموافق

عند التقاء الكريتين يكون $z_1 = z_2$

يعني : $-5t_C^2 + 8t_C = -5t_C^2 + 18t_C - 13$ ومنه : $t_C = 1,3s$

موضع التقاء الكريتين معلم بالأنسوب z_C ، حيث $z_C = z_1 = z_2$

أي أن : $z_C = -5t_C^2 + 8t_C = -5(1,3)^2 + 8(1,3) = 1,95m$

تمرين 4 السقوط الحر بسرعة بدئية

نهمل جميع الاحتكاكات ونأخذ $g = 10m.s^{-2}$

يرسل لاعب كرة كتلتها m من نقطة O رأسيا نحو الأعلى بسرعة بدئية $\vec{v}_0$.

يصل مركز قصور الكرة إلى ارتفاع أقصى $h = 5m$ فوق النقطة O ثم ينزل.

1 ـ أثبت المعادلة التفاضلية للحركة.

2 ـ أوجد حل هذه المعادلة التفاضلية وبين أن حركة G تشمل طورا للصعود وطورا للنزول.

3 ـ حدد تعبير المعادلة الزمنية $OG = z = f(t)$

4 ـ احسب قيمة السرعة البدئية v_0 .

5 ـ في أية لحظة يمر مركز قصور الكرة من جديد من النقطة O.

حل

1 ـ إثبات المعادلة التفاضلية لحركة الكرة

تخضع الكرة أثناء حركتها في المرجع الأرضي إلى :

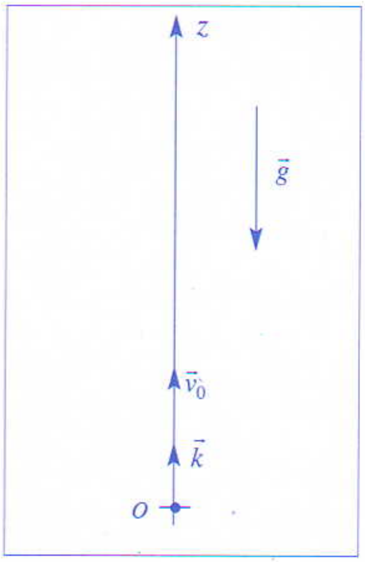
$\vec{P}$: وزنها

قوة الاحتكاك ودافعة أرخميدس مهملتان أمام الوزن $\vec{P}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة، نكتب : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g} = m.\vec{a}_G = m\dfrac{d\vec{v}_G}{dt}$ ومنه : $\vec{a}_G = \dfrac{d\vec{v}_G}{dt} = \vec{g}$

نسقط هذه العلاقة على المحور Oz الموجه نحو الأعلى :

المعادلة التفاضلية للحركة هي : $a_z = \dfrac{dv_z}{dt} = -g$



2 ـ حل المعادلة التفاضلية

الشروط البدئية : $v_{oz} = v_0$ و $z_0 = 0$ إذن : $v_z = -g.t + v_0$

إذا كانت $t < \dfrac{v_0}{g}$ ، تكون $v_z > 0$ ، أي أن الكرة في حالة صعود ؛

إذا كانت $t > \dfrac{v_0}{g}$ ، تكون $v_z < 0$ ، أي أن الكرة في نزول.

إذن، تشمل الحركة طورين وهما طور الصعود وطور النزول.

3 ـ تعبير المعادلة الزمنية

حسب التعريف، $v_z = \dfrac{dz}{dt}$ ، إذن z هي دالة أصل لـ $v_z = -g.t + v_{oz}$

إذن لدينا : $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t + z_0$ أو $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0.t$ (لأن $z_0 = 0$)

4 ـ حساب v_0

يصل مركز قصور الكرة إلى الارتفاع الأقصى h عند لحظة انعدام سرعته أي : $v_z = 0$ ومنه : $t = \frac{v_0}{g}$

إذن : $z = h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0.\frac{v_0}{g}$ أي أن : $h = \frac{v_0^2}{2g}$

ومنه : $v_0 = \sqrt{2.g.h} = \sqrt{2.10.5} = 10m.s^{-1}$

5 ـ تحديد لحظة مرور الكرة من النقطة O

عندما يمر مركز قصور الكرة من النقطة O ، لدينا : $z = 0$

ومنه : $O = 5.t^2 + 10.t$

أو $O = t.(-5t + 10)$

نستنتج أن مركز قصور الكرة يمر من جديد من النقطة O عند اللحظة : $t = \frac{10}{5} = 2s$ ؛

علما أنه أُرسل من النقطة O، عند $t = 0$.