الأستاذ أيوب مرضي	مـــــــــادة الـــــــفـــــــيـــــزيـــــاء	7 صفحات
مستوى الثانية بكالوريا علوم تجريبية	الـجــزء الثالث: الكهرباء	
شعبة: علوم الحياة و الأرض – علوم فيزيائية	مدة الإنجاز (درس+تمارين): 6 س + 2 س	

الدرس الثامن

التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية

Les oscillations libres dans un circuit RLC série

I. تفريغ مكثف في وشيعة في دارة متوالية RLC.

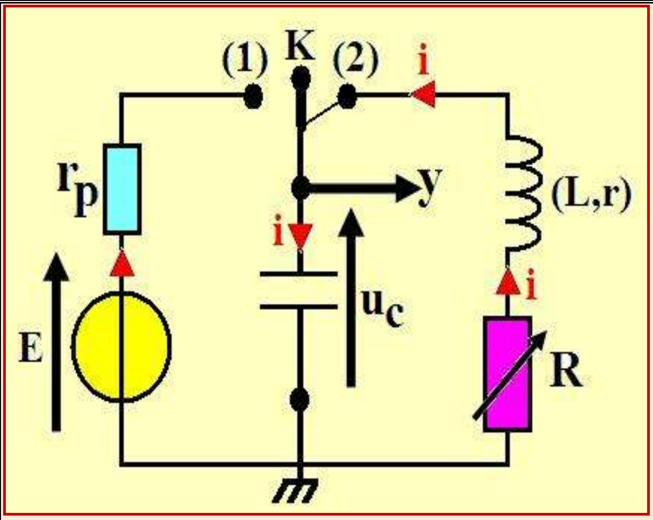
1. الدراسة التجريبية للدارة المتوالية RLC:

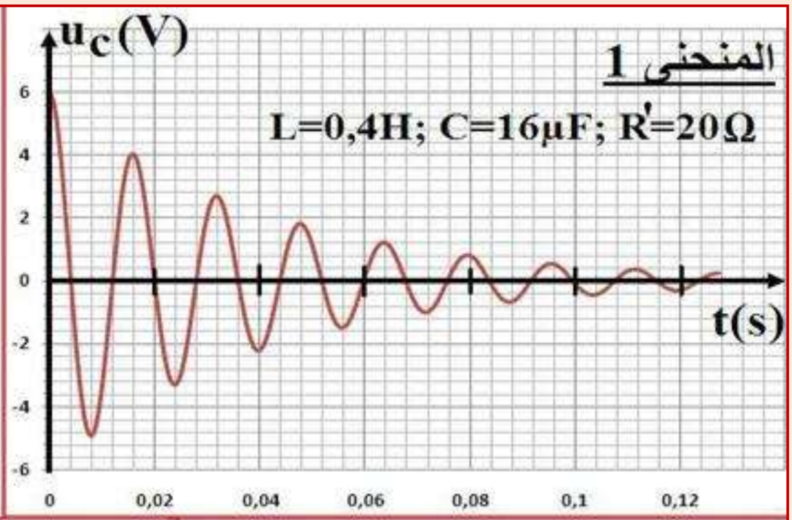
أ. نشاط تجريبي 1:

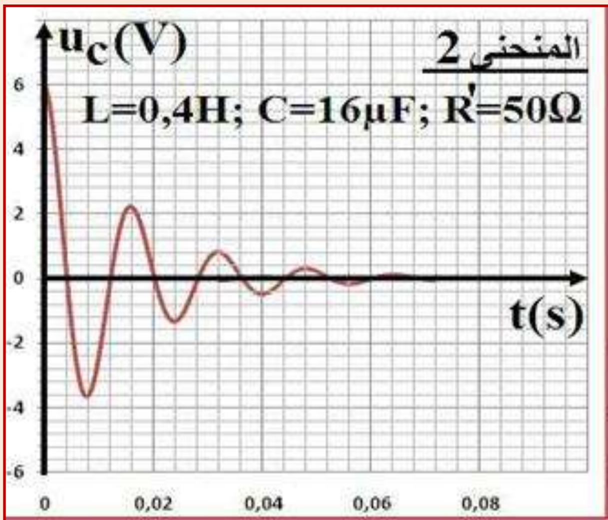
نعتبر التركيب التجريبي الممثل جانبة و المكون من مولد مؤمثل قوته الكهرمحركة $E=6V$، مكثف سعته C، وشيعة معامل تحريضها L و مقاومتها r، موصل أومي مقاومته R . كل من R و L و C قابلة للضبط.

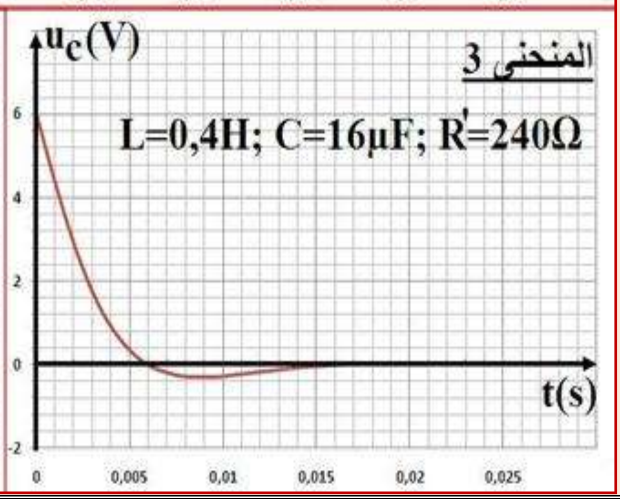
بعد مدة زمنية طويلة من شحن المكثف نضع قاطع التيار فيلا الموضع (2) و نعاين بواسطة راسم تذبذب ذاكراتي التوتر u_c بين مربطي المكثف (أنظر الشكل).

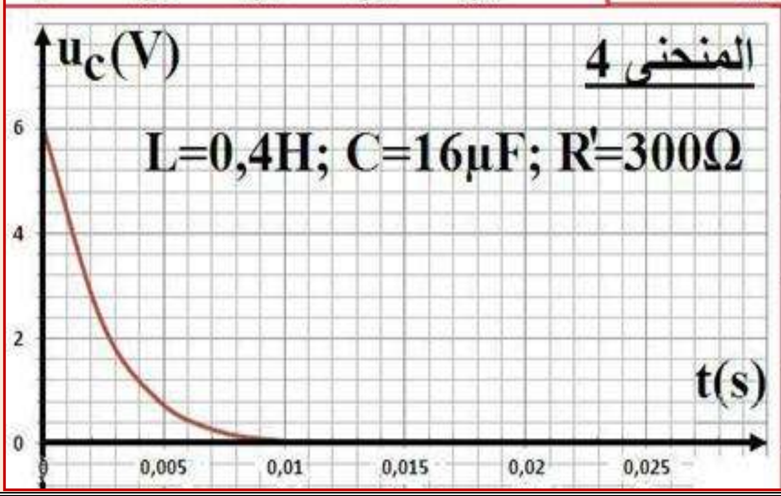
نضبط سعة المكثف على القيمة $16\mu F$ و معامل تحريض الوشيعة على القيمة $0,4H$، ونقوم بتغيير قيمة مقاومة الموصل الأومي R بحيث تكون المقاومة الكلية للدارة هي $R'=R+r$، وفي كل مرة نحصل على منحنى من المنحنيات التالية:



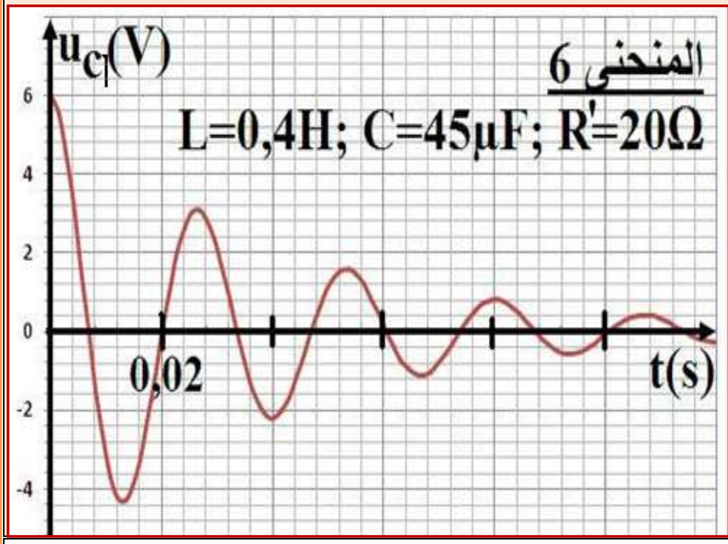


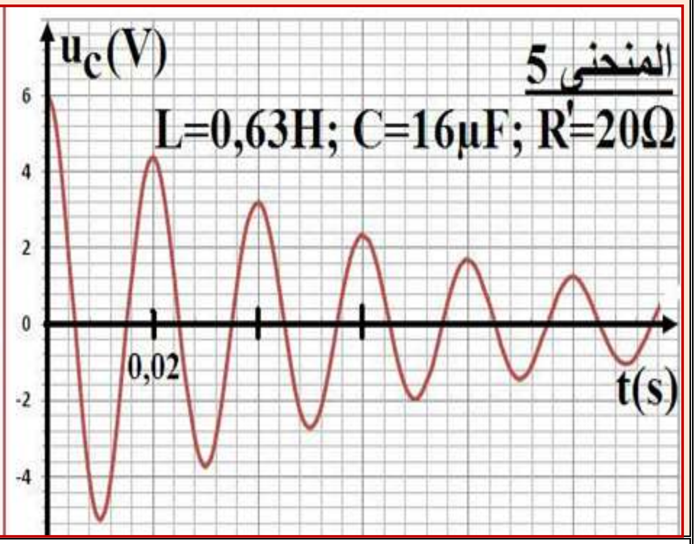






نضبط الآن المقاومة الموصل الأومي R لتكون قيمة المقاومة الكلية للدارة هي $R'=20\Omega$، ونقوم بتغيير قيمة السعة أو معامل التحريض، فنحصل على المنحنيين التاليين:





- **تأثير المقاومة الكلية $R'=R+r$:**

1) كيف يتغير وسع و إشارة التوتر u_C مع الزمن؟ و ماذا نسمي تذبذبات الدارة RLC؟

التوتر u_C بين مربطي المكثف متناوب يتناقص وسعه بدلالة الزمن، نقول إن التذبذبات مخمدة. وبما أن هذه التذبذبات تتم دون تزويد الدارة RLC بأي طاقة بعد اللحظة $t=0$ نقول إن التذبذبات حرة.

2) حدد شبه الدور T بالنسبة للمنحنى 1 و 2.

عندما تكون المقاومة الكلية للدارة صغيرة فإننا نحصل على نظام تذبذبات شبيه بالدوري يطلق عليه " نظام شبه دوري" . يتميز هذا الأخير بشبه الدور T الذي في هذه الحالة يساوي $T=0,016s=16ms$.

3) ما تأثير R على وسع و إشارة التوتر u_C؟

عندما تزداد قيمة المقاومة R يزداد خمود التذبذبات حيث نلاحظ أن وسع التذبذبات ينقص كثيرا.

4) ماذا يحدث عندما تصبح R كبيرة جدا؟

عندما تصبح R كبيرة جدا تزول التذبذبات حيث يتناقص الوسع تدريجيا إلى أن ينعدم، و نميز في هذه الحالة بين نظامين هما: نظام حرج (المنحنى 3) و نظام لا دوري (المنحنى 4).

5) ماذا يحدث عندما تصبح R مهملة؟

عندما تصبح R مهملة يزول خمود التذبذبات أي أن وسع التذبذبات يبقى ثابتا، و بهذا يكون نظم التذبذبات دوري جيبي مع مرور الزمن.

- **تأثير L و C:**

6) ماذا يحدث عندما نغير قيمة L؟

نلاحظ أنه عند الزيادة في قيمة معامل تحريض الوشيعة L تزداد قيمة شبه الدور T للتذبذبات.

7) ماذا يحدث عندما نغير قيمة C؟

نلاحظ أنه عند الزيادة في قيمة سعة المكثف C تزداد قيمة شبه الدور T للتذبذبات.

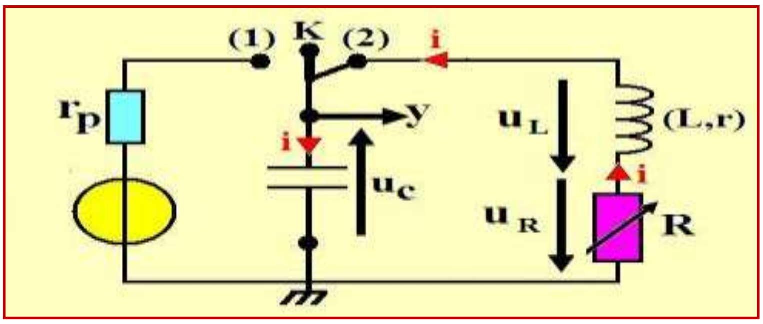
ب. خلاصة:

يؤدي تفريغ مكثف في وشيعة في دارة متوالية RLC إلى ظهور تذبذبات حرة ومخمدة. نقول إن الدارة RLC المتوالية تكون **متذبذبا كهربائيا حرا و مخمدا**.

2. الدراسة النظرية للدارة المتوالية RLC:

نعتبر التركيب التجريبي الممثل جانبة والمكون من مكثف سعته C، وشيعة معامل تحريضها L و مقاومتها الداخلية r، و موصل أومي مقاومته R.

نؤرجح قاطع التيار K إلى الموضع (2) بعد شحن المكثف عند لحظة $t = 0$.



حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_L + u_R + u_C = 0$ (1)

حسب قانون أوم: $u_R = R.i$ و $u_L = L.\frac{di}{dt} + ri$ أي أن

تصبح المعادلة (1) كما يلي: $L.\frac{di}{dt} + ri + Ri + u_C = 0$

كما نضع أن: $R' = R + r$ فتصبح المعادلة: $L.\frac{di}{dt} + R'.i + u_C = 0$

ونعلم أن: $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = C.u_C$ أي أن: $i = C.\frac{du_C}{dt}$ أي $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

و بتعويض i و $\frac{di}{dt}$ بتعبيريهما في المعادلة السابقة **نحصل على المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$** بين مربطي المكثف في دارة متوالية RLC:

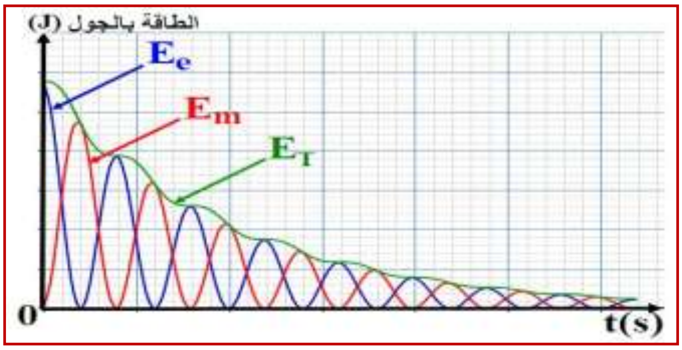
$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R'}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}.u_C = 0 \Leftrightarrow LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + R'C.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

ملاحظة:

- بتعويض $u_C(t)$ بـ $\frac{q}{C}$ في المعادلة التفاضلية السابقة، نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q(t)، وتكتب كما يلي: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R'}{L}.\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}.q = 0$
- المقدار $\frac{R'}{L}.\frac{du_C}{dt}$ هو المسؤول عن ظاهرة خمود التذبذبات.

3. الدراسة الطاقية للدارة المتوالية RLC:

إن الطاقة الكلية E_T في الدارة RLC تتناقص خلال كل تبادل طاقي بين المكثف و الوشيعة نتيجة وجود المقاومة الكلية للدارة 'R و التي تبدد الطاقة الكلية مع مرور الزمن إلى طاقة حرارية بمفعول جول. وللبرهنة على أن الطاقة الكلية تتناقص مع مرور الزمن، يجب أن نبين أن: $\frac{dE_T}{dt} < 0$.



لدينا الطاقة الكلية للدارة هي: $E_T = E_m + E_e$ أي $E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C^2$

أي: $\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}L.2.\frac{di}{dt}.i + \frac{1}{2}C.2.\frac{du_c}{dt}.u_c$ أي: $\frac{dE_T}{dt} = LC.\frac{d^2u_C}{dt^2}.C.\frac{du_C}{dt} + C.\frac{du_c}{dt}.u_c$

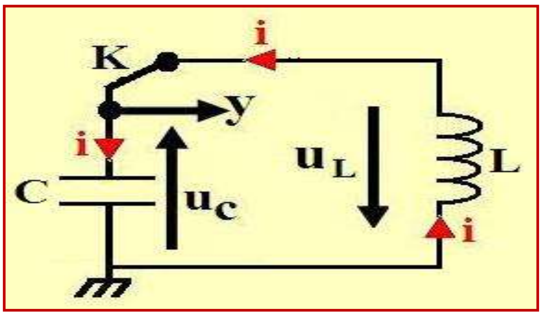
أي أن: $\frac{dE_T}{dt} = C.\frac{du_C}{dt} \times (LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_c)$ (1)

و لدينا المعادلة التفاضلية: $LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + R'C.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$ أي أن: $LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = -R'C.\frac{du_C}{dt}$

ومنه تصبح العلاقة (1) كما يلي: $\frac{dE_T}{dt} = C.\frac{du_C}{dt} \times (-R'C.\frac{du_C}{dt})$ أي أن: $\frac{dE_T}{dt} = -R'.i^2 < 0$

و بالتالي الطاقة الكلية في دارة *RLC* متوالية دالة تناقصية للزمن.

II. التذبذبات غير المخمدة في الدارة المثالية LC.



1. تعريف الدارة المثالية LC:

نعتبر الدارة الممثلة جانبه و المكونة من مكثف ذو سعة C ووشيعة معامل تحريضها L **ومقاومتها منعدمة** ، تسمى هذه الدارة **بالمثالية** لصعوبة تحقيقها تجريبيا نظرا لتوفر الوشيعة على مقاومة داخلية ناتجة عن أسلاك لفاتها، إضافة إلى مقاومة أسلاك الربط.

2. الدراسة النظرية للدارة المثالية LC:

أ. المعادلة التفاضلية:

حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_L + u_C = 0$

أي : $L.\frac{di}{dt} + u_C = 0$

ونعلم أن: $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = C.u_C$ أي أن: $i = C.\frac{du_C}{dt}$ أي $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

و بتعويض $\frac{di}{dt}$ بتعبيرها في المعادلة السابقة **نحصل على المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$** بين مربطي المكثف في الدارة المثالية LC:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0 \Leftrightarrow LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$$

ملاحظة:

- بتعويض $u_C(t)$ بـ $\frac{q}{C}$ في المعادلة التفاضلية السابقة، نحصل على المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q(t)، وتكتب كما يلي: $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}.q = 0$.

ب. حل المعادلة التفاضلية:

المعادلة التفاضلية $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$ معادلة خطية من الدرجة الثانية، رياضيا يكتب حلها على الشكل التالي: $u_C(t) = U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)$ بحيث :

- U_m: وسع التذبذبات وحدته الفولط (V).
- T_0: الدور الخاص للتذبذبات وحدته الثانية (s).
- φ: الطور عند الأصل بالراديان (rad).
- $\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi$: الطور عند اللحظة t بالراديان (rad).

♦ **تحديد تعبير الدور الخاص T_0:**

لدينا $u_C(t) = U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)$ و بالاشتقاق الأول نجد: $\frac{du_C}{dt} = -U_m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)$

وكذلك: $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -U_m.(\frac{2\pi}{T_0})^2.\cos(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)$ أي أن: $\frac{d^2u_C}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_c(t)$

و بتعويض $\frac{d^2u_C}{dt^2}$ بتعبيرها في المعادلة التفاضلية نجد: $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_c(t) + \frac{1}{LC}.u_C = 0$

أي : $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_c(t) = -\frac{1}{LC}.u_C$ أي: $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$ و منه: $\mathbf{T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}}$

يتعلق الدور الخاص T_0 للتذبذبات الحرة غير المخمدة بـ L و C.

وحدة الدور الخاص في النظام العالمي للوحدات هي الثانية (s)، وذلك حسب معادلة الأبعاد التالية:

$$[T_0] = \sqrt{[L].[C]}$$

- لدينا: $i = C.\frac{du_C}{dt}$ أي: $[I] = [C].\frac{[U]}{[t]}$ ومنه: $[C] = [I].\frac{[t]}{[U]}$
- لدينا: $u_L = L.\frac{di}{dt}$ أي: $[U] = [L].\frac{[I]}{[t]}$ ومنه: $[L] = [U].\frac{[t]}{[I]}$

أي أن: $[T_0] = \sqrt{[U].\frac{[t]}{[I]}.[I].\frac{[t]}{[U]}}$ أي: $[T_0] = \sqrt{[t]^2}$

و منه: $[T_0] = [t]$ وبالتالي فإن للدور الخاص بعد زمني.

♦ تحديد U_m و φ بالشروط البدئية:

باعتبار الشروط البدئية للتوتر u_c و شدة التيار i أي عند اللحظة t = 0 لدينا:

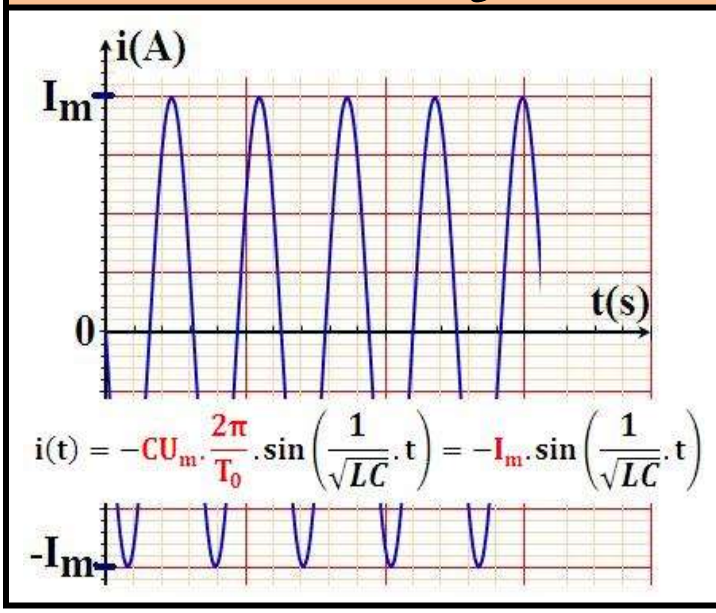
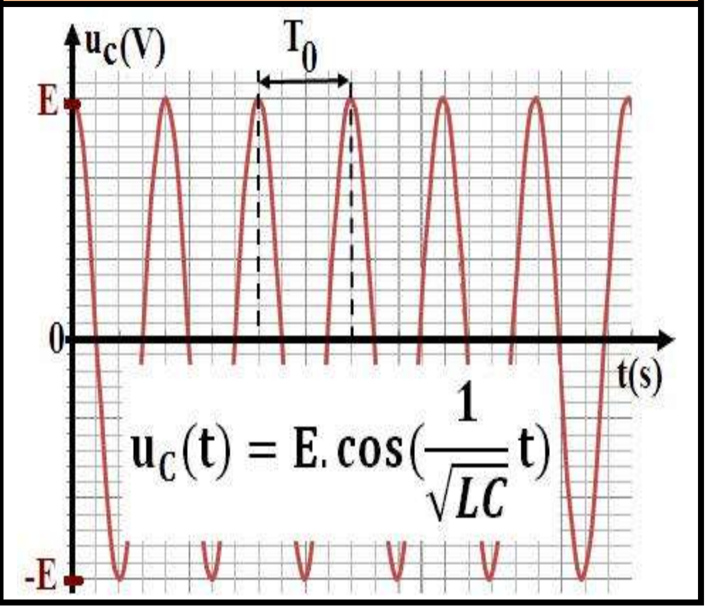
- التوتر u_c: $u_C = U_m.\cos(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi)$ و أن المكثف مشحون بدئيا أي: $u_C(0) = U_m.\cos(\varphi) = E$
- شدة التيار i: $i(t) = -CU_m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi)$ و أن: $i(0) = -CU_m.\frac{2\pi}{T_0}.\sin(\varphi) = 0$ أي أن:

$\sin(\varphi) = 0$ و هذا يعني أن لـ φ حلان هما: $\varphi = \pi$ أو $\varphi = 0$.

بما أن $U_m > 0$ و $E > 0$ فإنه من الواجب أن يكون $\cos(\varphi) > 0$ و منه فإن $\mathbf{\varphi = 0}$ أي أن $\mathbf{U_m = E}$.

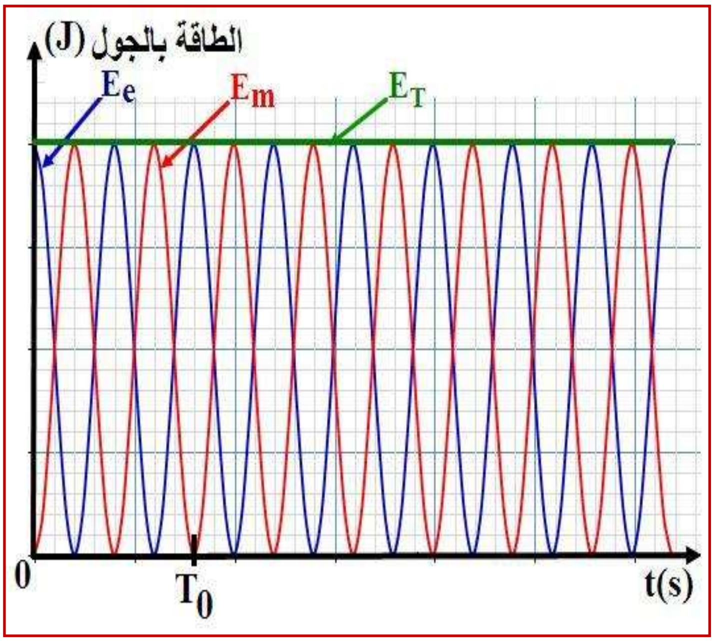
و منه حل المعادلة التفاضلية يكتب كما يلي: $u_C(t) = E.\cos(\frac{1}{\sqrt{LC}}t)$

ج. **منحنى تغيرات $u_C(t)$ و $i(t)$:**

منحنى تغيرات i بدلالة الزمن	منحنى تغيرات u_C بدلالة الزمن
	

3. الدراسة الطاقية للدارة المثالية LC:

أ. الطاقة الكلية للدارة المثالية LC:



الطاقة الكلية المخزونة في الدارة LC هي في كل لحظة مجموع الطاقة الكهربائية E_e المخزونة في المكثف والطاقة المغناطيسية E_m المخزونة في الوشيعة، بحيث: $E_T = E_m + E_e$ أي: $E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C{}^2$.

يمثل الرسم جانبه تغيرات كل من E_e و E_m و E_T بدلالة الزمن، فعندما تنقص الطاقة الكهربائية E_e المخزونة بالمكثف، تتزايد الطاقة المغناطيسية E_m في الوشيعة، و العكس صحيح. و هذا ما يسمى **بالتبادل الطاقي** بين المكثف والوشيعة. و بما أن المقاومة الكلية للدارة **منعدمة** فإن الطاقة الكلية ثابتة مع مرور الزمن، ونقول أن الطاقة في الدارة المثالية LC **تنحفظ**.

يمكن أن نعبر عن الطاقة الكلية للدارة كما يلي: $E_T = E_m + E_e$ أي $E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C{}^2$

أي: $E_T = \frac{1}{2}LC^2U_m^2\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right) + \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

نعلم أن: $T_0 = 2\pi.\sqrt{LC}$ أي: $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$

أي أن: $E_T = \frac{1}{2}LC^2U_m^2.\frac{1}{LC}\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right) + \frac{1}{2}CU_m^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$

أي أن: $E_T = \frac{1}{2}CU_m^2\left[\sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0}.t\right)\right]$

ومنه : $E_T = \frac{1}{2}CU_m^2$ وبالمثل يمكن أن نبرهن أن: $E_T = \frac{1}{2}LI_m^2$

ب. انحفاظ الطاقة الكلية للدارة المثالية LC:

لدينا الطاقة الكلية للدارة هي: $E_T = E_m + E_e$ أي $E_T = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}Cu_C{}^2$

أي: $\frac{dE_T}{dt} = \frac{1}{2}L.2.\frac{di}{dt}.i + \frac{1}{2}C.2.\frac{du_c}{dt}.u_c$ أي: $\frac{dE_T}{dt} = LC.\frac{d^2u_C}{dt^2}.C.\frac{du_C}{dt} + C.\frac{du_c}{dt}.u_c$

أي أن: $\frac{dE_T}{dt} = C.\frac{du_C}{dt} \times \left(LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_c\right)$ ولدينا المعادلة التفاضلية: $LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0$

ومنه فإن: $\frac{dE_T}{dt} = 0$ و بالتالي الطاقة الكلية في الدارة المثالية LC تنحفظ.

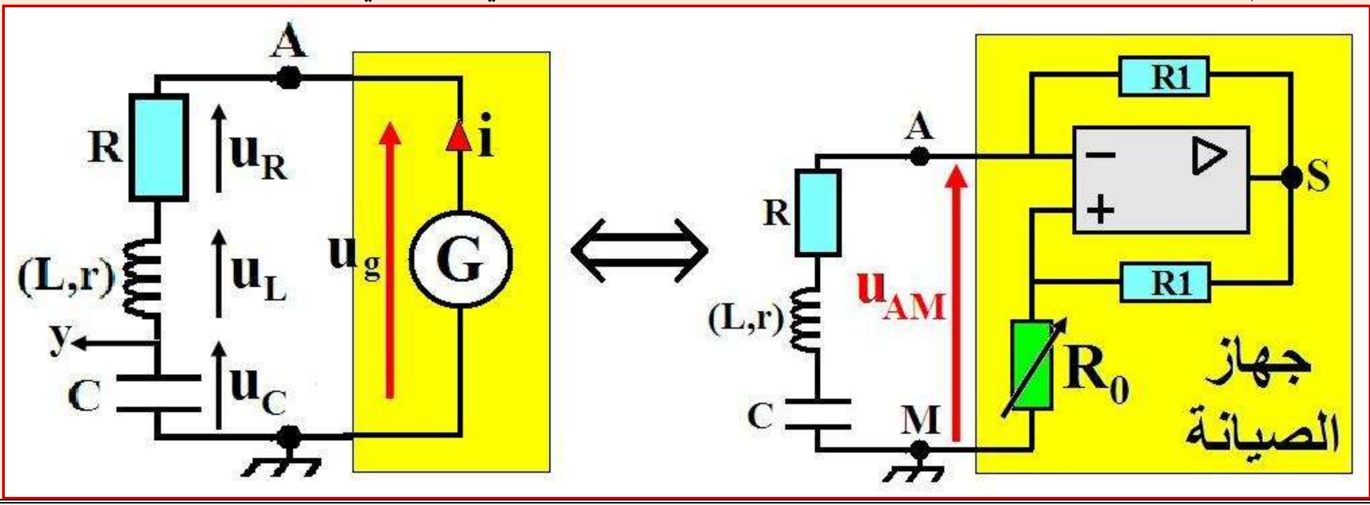
III. صيانة التذبذبات في الدارة المتوالية RLC.

أ. نشاط تجريبي 2:

يمكن صيانة تذبذبات الدارة المتوالية RLC للحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت، باستعمال جهاز (جهاز الصيانة) يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول.

للحصول على تذبذبات جيبية في الدارة المتوالية RLC، ننجز التركيب الممثل في الشكل أسفله، حيث G مولد يزود الدارة بتوتر u_g يتناسب اطرادا مع i شدة التيار الذي يمر فيه بحيث: $u_g = R_0.i$.

يتم الحصول على المولد G اعتمادا على التركيب الالكتروني الممثل في الشكل أسفله.



1) بين أن التوتر بين مربطي المكثف يحقق المعادلة التفاضلية: $\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R' - R_0}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}.u_C = 0$

حسب قانون إضافية التوترات لدينا: $u_L + u_R + u_C = u_g$ (1)

حسب قانون أوم: $u_R = R.i$ و $u_L = L.\frac{di}{dt} + ri$ أن

تصبح المعادلة (1) كما يلي: $L.\frac{di}{dt} + ri + Ri + u_C = R_0 i$

كما نضع أن: $R' = R + r$ فتصبح المعادلة: $L.\frac{di}{dt} + R'.i + u_C = R_0 i$

ونعلم أن: $i = \frac{dq}{dt}$ و $q = C.u_C$ أي أن: $i = C.\frac{du_C}{dt}$ أي $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt^2}$

و بتعويض i و $\frac{di}{dt}$ بتعبيريهما في المعادلة السابقة **نحصل على المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C(t)$** بين مربطي المكثف في دارة متوالية RLC:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R' - R_0}{L}.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}.u_C = 0 \Leftrightarrow LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} + (R' - R_0).C.\frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

2) استنتج القيمة التي يجب أن تأخذها R_0 للحصول على ذبذبات جيبية.

للحصول على تذبذبات جيبية في الدارة المتوالية RLC يجب أن يتحقق الشرط التالي: $R' - R_0 = 0$ أي أن: $R_0 = R'$

ب. خلاصة:

يمكن صيانة تذبذبات الدارة المتوالية RLC للحصول على توتر متذبذب ذي وسع ثابت، باستعمال جهاز يسمى جهاز الصيانة، يزود الدارة بطاقة تعوض الطاقة المبددة في الدارة بمفعول جول.

للحصول على تذبذبات جيبية في الدارة المتوالية RLC يجب أن تتساوى مقاومة الجهاز مع المقاومة الكلية للدارة المتوالية RLC.

التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية