

# حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

## 1- حركة نقطة من جسم صلب في دوران حول محور ثابت :

### 1-تعريف :

يكون جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت ( $\Delta$ ) ، إذا كانت لجميع نقطه حركة دائرية مركزية على هذا المحور .

### 2- معلمة نقطة :

نمعلم حركة نقطة  $M$  من جسم في دوران ب :

أفصولها المنحني  $s$  أو أفصولها الزاوي  $\theta$  يعبر عنه ب ( $rad$ ) حيث :

$$s=r.\theta$$

### 3- السرعة الزاوية والسرعة الخطية :

السرعة الزاوية  $\omega$  هي مشتقة الأفصول الزاوي بالنسبة للزمن وحدتها في  $S.I$  هي:  $rad.s^{-1}$

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

السرعة الخطية  $v$  هي مشتقة الأفصول المنحني بالنسبة للزمن وحدتها في  $S.I$  هي:  $m.s^{-1}$

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

العلاقة بين السرعة الخطية والسرعة الزاوية  $v = r\dot{\theta}$

### 4-التسارع الزاوي :

#### 4.1-تعريف :

التسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  هو مشتقة السرعة الزاوية بالنسبة للزمن وحدته في  $S.I$  هي:  $rad.s^{-2}$

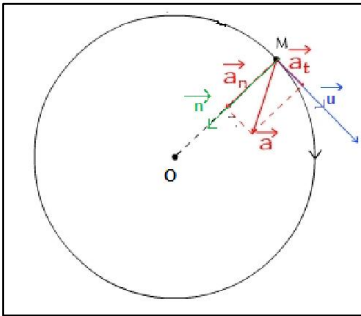
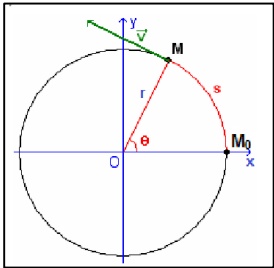
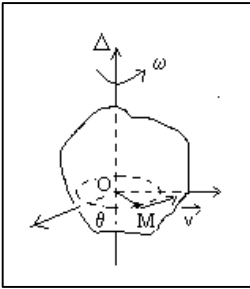
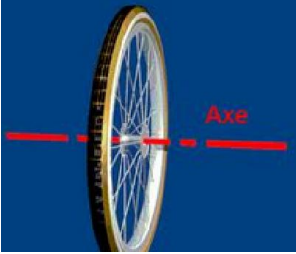
$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

#### 4.2-التسارع المماسي والمنظمي :

في معلم فرييني متجهة التسارع تكتب :

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

$$\begin{cases} \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d(R\dot{\theta})}{dt} = R.\ddot{\theta} & \text{التسارع المماسي} \\ \vec{a}_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(R.\dot{\theta})^2}{R} = R.\dot{\theta}^2 & \text{التسارع المنظمي} \end{cases} \quad \text{حيث :}$$



## 5-الدوران المتغير بانتظام :

في حالة الدوران المتغير بانتظام يكون التسارع الزاوي ثابت :  $\ddot{\theta} = Cte$

السرعة الزاوية :  $\dot{\theta} = \ddot{\theta}t + \dot{\theta}_0$

الأفصول الزاوي :  $\theta = \frac{1}{2}\ddot{\theta}.t^2 + \dot{\theta}_0.t + \theta_0$

العلاقة المستقلة عن الزمن نحصل عليها بإقصاء الزمن بين المعادلتين  $\dot{\theta}$  و  $\theta$  نحصل على :

$$\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1 = 2\ddot{\theta}(\theta_2 - \theta_1)$$

ملحوظة :

في حالة الدوران المنتظم تكون السرعة الزاوية ثابتة :  $\dot{\theta} = Cte$

الأفصول الزاوي يكتب :  $\theta = \dot{\theta}_0.t + \theta_0$

## II-العلاقة الأساسية للديناميك :

### 1-نص العلاقة :

في معلم غاليلي، يساوي المجموع الجبري لعزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت ( $\Delta$ )، في كل لحظة، جداء عزم القصور  $J_\Delta$  والتسارع الزاوي  $\ddot{\theta}$  للجسم :

$$\sum M_\Delta(\vec{F}) = J_\Delta \cdot \ddot{\theta}$$

$J_\Delta$  : عزم قصور الجسم ب :  $kg.m^2$

$\ddot{\theta}$  : التسارع الزاوي للجسم ب :  $rad.s^{-2}$

### 2-أمثلة عزم القصور لبعض الأجسام ذات أشكال هندسية بسيطة :

صيغة عزم قصوره $J_\Delta$	الجسم الصلب
$\frac{1}{2}m.R^2$	قرص
$\frac{1}{2}m.R^2$	أسطوانة
$\frac{2}{5}m.R^2$	كرة
$\frac{1}{12}m.L^2$	ساق

$\frac{1}{3} m \cdot L^2$	<p>ساق</p>
$mR^2$	<p>حلقة</p>

### تمرين 1:

نعتبر أسطوانة في دوران حول محور ثابت (Δ) رأسي .

1-يمثل المنحنى أسفله مخطط السرعة الزاوية لحركة نقطة M توجد على بعد  $r = 10 \text{ cm}$  من المحور (Δ) . نعطي عزم قصور الأسطوانة

$$J_{\Delta} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

1.1- ما هي طبيعة حركة النقطة M ؟ علل جوابك .

1.2- حدد قيمة التسارع الزاوي  $\theta$  واكتب معادلة السرعة الزاوية  $\omega = f(t)$  .

2- علما أن الأفصول الزاوي منعدم عند أصل التواريخ .

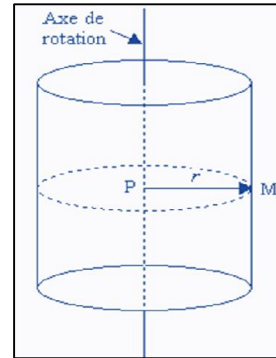
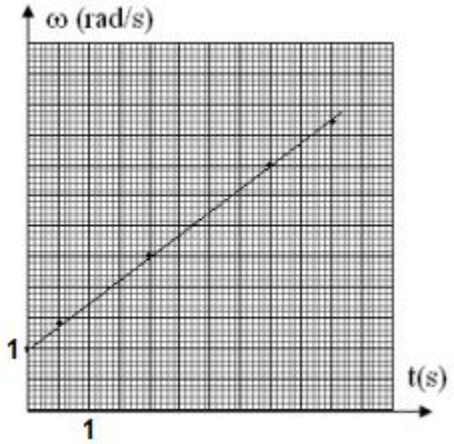
2.1- أكتب المعادلة الزمنية للحركة  $\theta = f(t)$  .

2.2- أحسب عدد الدورات المنجزة من طرف القرص بين التاريخين  $t_1 = 4,0 \text{ s}$  و  $t_2 = 5,2 \text{ s}$  .

2.3- نعتبر اللحظة ذات التاريخ  $t = 2 \text{ s}$  أحسب في هذه اللحظة قيمتي التسارع المماسي  $a_T$  والتسارع المنظمي  $a_N$  للنقطة M واستنتج

منظم التسارع  $a$  .

3- أحسب مجموع عزوم القوى المطبقة على القرص بالنسبة للمحور (Δ) .



### الحل :

1.1- طبيعة حركة النقطة M :

من خلال المنحنى  $\omega = f(t)$  نلاحظ أن السرعة الزاوية عبارة عن دالة تآلفية وبالتالي حركة النقطة M دائرية متغيرة بانتظام .

1.2- تحديد قيمة التسارع الزاوي :

يمثل التسارع الزاوي المعامل الموجه للمنحنى  $\omega = f(t)$  نكتب :  $\ddot{\theta} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{4-1}{4-0} = 0,75 \text{ rad. s}^{-2}$  معادلة السرعة الزاوية تكتب :

$\omega = \dot{\theta}t + \omega_0$  مع  $\omega_0 = 1 \text{ rad. s}^{-1}$  عند  $t = 0$  مبيانيا نجد :

$$(\text{rad. s}^{-1}) \leftarrow \omega = 0,75t + 1$$

2.1- المعادلة الزمنية لحركة النقطة M :

$$(\text{rad}) \leftarrow \theta = 0,375t^2 + t$$

2.2- عدد الدورات المنجزة بين اللحظتين  $t_1$  و  $t_2$  :

$$n = \frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \Leftrightarrow \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = 2\pi n$$

ت.ع :

$$n = \frac{(0,375 \times 4^2 + 4) - (0,375 \times 5,2^2 + 5,2)}{2\pi} =$$

2.3- قيمة التسارع المماسي والمنظمي :

$$a_T = r\ddot{\theta} = 0,1 \times 0,75 = 7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m. s}^{-2}$$

$$a_N = r \cdot \dot{\theta}^2 = r(0,75t + 1)^2$$

$$a_N = 0,1 \times (0,75 \times 2 + 1)^2 = 0,25 \text{ m. s}^{-2}$$

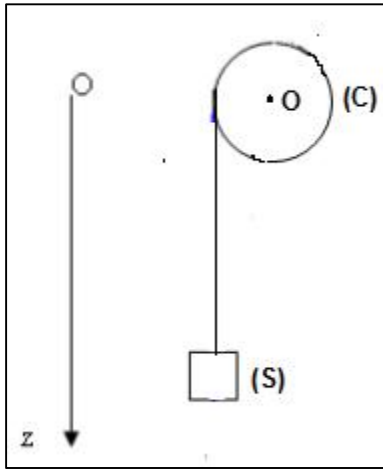
منظم متجهة التسارع :

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{(7,5 \cdot 10^{-2})^2 + (0,25)^2} = \text{ m. s}^{-2}$$

3- مجموع عزوم متجهات القوى المطبقة على الاسطوانة:

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} \cdot \ddot{\theta}$$
$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = 0,75 \times 6 \cdot 10^{-2} = \text{ N.m}$$

## تطبيق 2:



تدور أسطوانة (C) حول محور ثابت أفقي ( $\Delta$ ) يمر من مركزها O ، كتلتها  $M = 10\text{kg}$  وشعاعها  $r = 20\text{cm}$  ، تلف حول الأسطوانة حبل، ذي كتلة مهملة و غير قابل للمد . نعلق في الطرف الحر للحبل جسم (S) كتلته  $m = 1\text{kg}$  . نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية فيتحرك الجسم نحو الأسفل مسببا دوران الأسطوانة .  
نهمل الاحتكاكات .

- 1- اعط تعبير  $a$  تسارع الجسم (S) بدلالة  $m$  و  $M$  و  $g$  . أحسب  $a$
- 2- استنتج توتر الحبل

نعطي :

$$J_{\Delta} = \frac{1}{2} M . r^2 \quad \text{عزم قصور الأسطوانة :}$$

$$g = 9,8 \text{ 1N.kg}^{-1} \quad \text{شدة الثقالة :}$$

الحل :

1- تعبير التسارع  $a$  :

الجسم (S) ينجز حركة إزاحة تحت تأثير قوتين :  $\vec{P}$  وزنه و  $\vec{T}$  توتر الحبل .  
القانون الثاني لنيوتن يكتب :

$$\vec{P} + \vec{T} = m . \vec{a}$$

نسقط العلاقة على المحو Oz :

$$P - T = ma$$

$$mg - T = ma$$

$$T = mg - ma$$

الاسطوانة (C) تنجز حركة دوران تحت تأثير توتر الحبل  $\vec{T}$  وزنها  $\vec{P}$  وتأثير  $\vec{R}$  محور الدوران ( $\Delta$ ) :  
العلاقة الأساسية لديناميك :

$$\sum M_{\Delta}(\vec{F}) = J_{\Delta} . \ddot{\theta}$$

$$M_{\Delta}(\vec{P}') + M_{\Delta}(\vec{R}) + M_{\Delta}(\vec{T}') = J_{\Delta} . \ddot{\theta}$$

باعتبار المنحى الموجب للدوران

$$0 + 0 + T' . r = J_{\Delta} \ddot{\theta} \quad (1)$$

باعتبار الحبل غير مدود وكتلته مهملة فإن :  $T = T'$

لاينزلق الحبل على الأسطوانة :  $\theta = \frac{z}{r}$  ومنه  $\ddot{\theta} = \frac{a}{r}$

كما أن تعبير عزم قصور الاسطوانة هو :  $J_{\Delta} = \frac{1}{2} M r^2$

العلاقة (1) تكتب :

$$(mg - ma)r = \frac{1}{2} M . r^2 . \frac{a}{r}$$

$$a \left( \frac{1}{2} M + m \right) = mg$$

$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2} M} g = \frac{1}{1 + 5} \times 9,8 \text{ 1} = 1,64 \text{ m.s}^2$$

2- استنتج توتر الحبل:

لدينا:

$$T = m(g - a)$$

$$T = 9,8 \cdot 1 - 1,64 = 8,17 \text{ N}$$