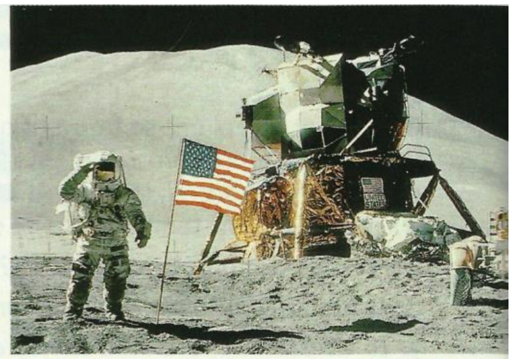
Physique 10 : Mouvements de chutes verticales

1. Comment caractériser le mouvement d'un solide en chute libre ?

Lors de la mission Appolo 15, Dave Scott a montré que, sur la Lune, un marteau et une plume, lâchés simultanément, avaient les mêmes mouvements de chute : ils arrivaient en même temps sur le sol lunaire **[Doc. 1]**. Il en est de même sur Terre si la chute se fait dans le vide (voir l'*activité préparatoire A*, page 227). Comment interpréter ce phénomène ?



Doc. 1 *Sur la Lune, la plume et le marteau ont le même mouvement de chute. Ces objets sont en chute libre. Voir le site : www.astrosurf.org/lombry/galilee-hommage4.htm*

1.1 Étude expérimentale

Étudions le mouvement de chute d'une bille.

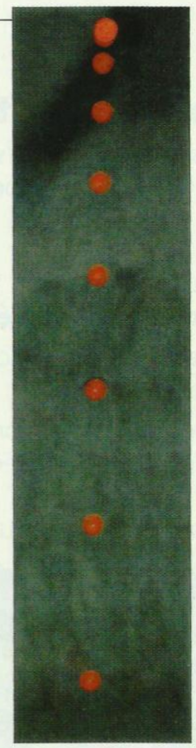
Activité 1

Comment varient la vitesse et l'accélération au cours d'une chute ?

- Filmer la chute d'une bille lâchée sans vitesse initiale, devant une règle graduée.
- Relier la webcam à l'ordinateur muni d'un logiciel de traitement d'images.
- Analyser le film image par image **[Doc. 2]**.
- Déterminer les différentes positions z et les vitesses instantanées ϑ pour chacune des positions du centre d'inertie de la bille (l'axe (Oz) est orienté vers le bas, O coïncidant avec la position de départ de la bille).
- Faire représenter les courbes $z(t)$, $z(t^2)$ et $\vartheta(t)$.
- À partir de la courbe $\vartheta(t)$, calculer l'accélération $a(t)$ de la bille.
- Recommencer avec une autre bille de masse différente.

1. Commenter les graphiques obtenus.

2. Comparer la valeur de l'accélération à celle de l'intensité de pesanteur.



Doc. 2 *Positions successives de la bille lors de sa chute.*

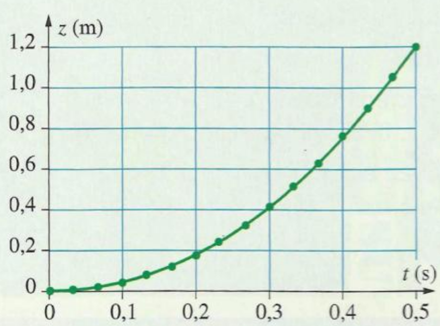
> Observation

Nous constatons que :

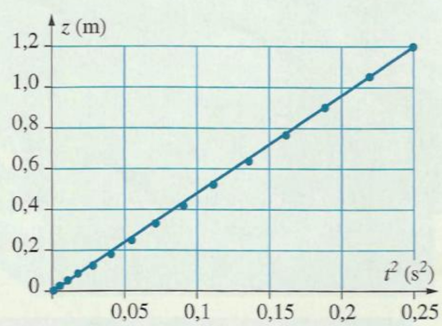
– la trajectoire est verticale ;

– $z(t^2)$ et $\vartheta(t)$ sont des fonctions linéaires du temps **[Doc. 4 et 5]** ;

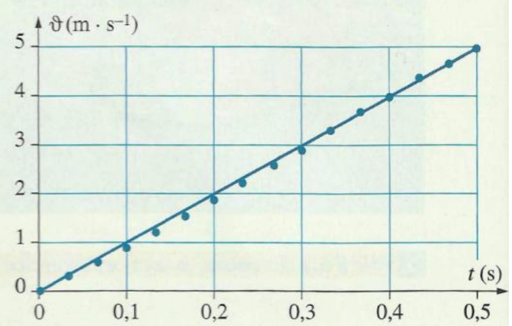
– l'accélération a, égale au coefficient directeur de la droite représentant $\vartheta(t)$, est constante. Numériquement, on trouve $a = 10 \text{ m . s}^{-2}$ qui correspond à la valeur de g, intensité de la pesanteur : $\boldsymbol{a} = \mathbf{g}$.



Doc. 3 *Représentation de z en fonction de t ; z représente la hauteur de chute.*



Doc. 4 *Représentation de z en fonction de t².*



Doc. 5 *Représentation de ϑ en fonction de t.*

Nous constatons également que les courbes obtenues avec des billes de masses différentes sont identiques : la masse n'intervient pas.

Cherchons une interprétation.

1.2 Le champ de pesanteur

Comme tout objet situé au voisinage de la Terre, la bille est soumise à son poids. Précisons les caractéristiques de cette force.

> La force de pesanteur

Depuis la classe de Seconde, nous savons que tout objet situé au voisinage de la Terre subit, de la part de celle-ci, une force de gravitation que l'on peut identifier à la force de pesanteur, appelée **poids** $\vec{P}$.

Cette force est verticale, dirigée vers le bas, appliquée au centre de gravité G de l'objet et de valeur $P = m \cdot g$, g étant l'intensité de la pesanteur.

> Le champ de pesanteur

Posons : $\vec{g} = \dfrac{\vec{P}}{m}$, soit $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$

$\vec{g}$ est appelé **vecteur champ de pesanteur.**

Le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$ a pour caractéristiques :

– une direction : la verticale du lieu ;

– un sens : du haut vers le bas ;

– une valeur : **l'intensité g de la pesanteur au lieu considéré** **[Doc. 6]**.

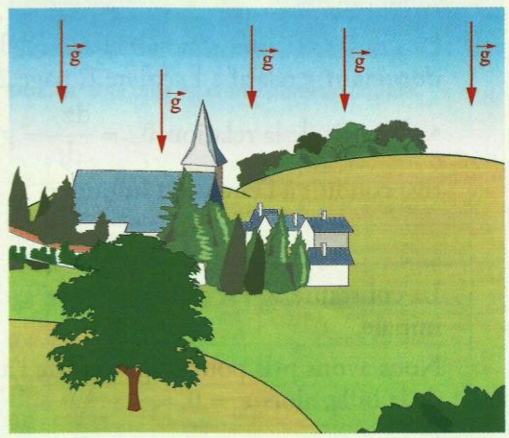
Elle est exprimée en newton par kilogramme ($N \cdot kg^{-1}$) ou en mètre par seconde au carré ($m \cdot s^{-2}$) (voir les *difficultés du chapitre* 1, page 28).

Au voisinage de la Terre, règne un champ de pesanteur. En un point M, ce champ est caractérisé par le vecteur champ de pesanteur $\vec{g}(M)$. Ce champ existe qu'il y ait ou non un objet en M et ne dépend que de la position de M.

Dans un domaine de l'espace dont les dimensions sont limitées à quelques kilomètres **[Doc. 7]**, le vecteur $\vec{g}$ est quasiment le même en tout point : le champ de pesanteur y est uniforme.

	Latitude	g (m . s⁻²)
Pôle Nord	90° N	9,8320
Groenland	74° N	9,8276
Dunkerque	51° N	9,8112
Bordeaux	44° N	9,8050
Lipari	38° N	9,8013
Saint-Thomas	0°	9,7819
Rio de Janeiro	22° S	9,7877
Îles Malouines	51° S	9,8115

Doc. 6 *L'intensité de la pesanteur dépend du lieu considéré. Les valeurs données sont celles du champ de pesanteur au niveau de la mer.*



Doc. 7 *Sur des distances horizontales et sur des hauteurs de quelques kilomètres, on peut admettre que le champ $\vec{g}$ est uniforme.*
En effet :
– g diminue environ de 0,3 % si on s'élève de 10 km ;
– la direction de $\vec{g}$ varie d'environ un degré entre deux points distants de 100 km.

1.3 Modélisation du mouvement

> Équation différentielle du mouvement

• **Système étudié :** la bille.

• **Référentiel d'étude :** le référentiel terrestre supposé galiléen.

• **Inventaire des forces :** la bille est soumise à son poids $\vec{P}$ et à l'action de l'air.

Nous supposons que l'action de l'air est négligeable devant le poids, car la bille est dense et de forme aérodynamique.

Nous pouvons donc considérer que la bille n'est soumise qu'à une seule force : son poids **[Doc. 8]**. Dans ces conditions, on dit que la bille est en **chute libre.**

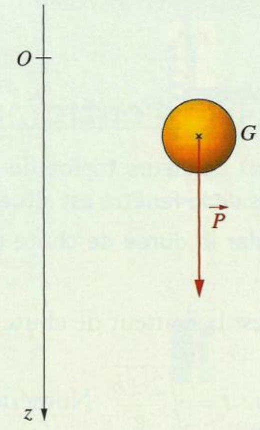
• **Somme des forces appliquées :** $\Sigma\vec{F}_{ext} = \vec{P}$.

• **Application de la deuxième loi de Newton :**

$$\Sigma\vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}_G, \quad \text{soit} \quad m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_G.$$

Nous avons donc : $\vec{a}_G = \vec{g}$, soit $\dfrac{d\vec{\vartheta}_G}{dt} = \vec{g}$ **(1)**

Nous retrouvons le résultat de l'*activité* 1 : $a_G = g$.



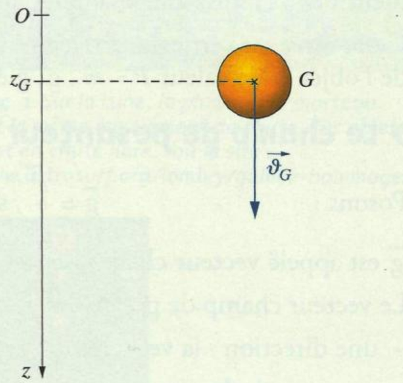
Doc. 8 *Lors de la chute libre, le poids est la seule force appliquée à la bille.*

Un solide est en chute libre lorsqu'il n'est soumis qu'à son poids.
L'accélération $\vec{a}_G$ de son centre d'inertie est alors égale au vecteur champ de pesanteur : $\vec{a}_G = \vec{g}$.
L'accélération est indépendante de la masse.

> Résolution analytique

• L'objet étant lâché sans vitesse initiale, la chute est verticale et le vecteur $\vec{\vartheta}_G$ constamment vertical **[Doc. 9]**. Sur un axe (Oz) vertical orienté vers le bas, nous obtenons par projection de la relation (1)

$\frac{d\vartheta_G}{dt} = g \ (g > 0)$ qui est l'équation différentielle du mouvement.



135439_10C_V6 40 x 55

Doc. 9 *La chute de la bille est verticale ; le vecteur $\vec{\vartheta}_G$ est vertical.*

Une première recherche de primitive conduit à l'équation de la vitesse :

$$\vartheta_G = g \cdot t + \vartheta_0.$$

La constante ϑ_0 est telle que $\vartheta_G = \vartheta_0$ à $t = 0$: c'est la vitesse initiale.

La bille est lâchée sans vitesse initiale : $\vartheta_0 = 0$.

D'où : $$\boldsymbol{\vartheta_G = g \cdot t}.$$

La vitesse est une fonction linéaire du temps, ce qui est confirmé par le **document 5** relatif à l'*activité* 1, page 228.

• À partir de la relation $\vartheta_G = \frac{dz_G}{dt} = g \cdot t$, une nouvelle recherche de primitive conduit à l'équation horaire :

$$z_G = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + z_0.$$

La constante z_0 est telle que $z_G = z_0$ à $t = 0$: c'est la cote de la position initiale.

Nous avons pris pour origine O de l'axe (Oz) la position initiale du centre de la bille, alors $z_0 = 0$.

D'où : $$z_G = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2.$$

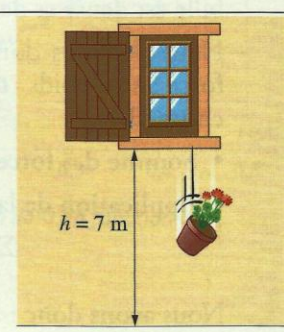
Le graphique $z_G = f(t^2)$ est donc une droite de coefficient directeur $\frac{1}{2} \cdot g$, ce que confirme le **document 4** relatif à l'*activité* 1, page 228.

Tous les corps lâchés sans vitesse initiale ont le même mouvement de chute libre, mouvement rectiligne uniformément accéléré, d'accélération égale à $\vec{g}$ (voir l'*activité préparatoire A*, page 227).

Le cas où le solide est lancé avec une vitesse initiale verticale ($\vartheta_0 \neq 0$) est traité dans l'*exercice résolu* 1, page 238.

Exercice d'entraînement

Un pot de fleurs tombe du deuxième étage d'un immeuble.
Le bas de la fenêtre est situé à 7 m du sol **[Doc. 10]**.
Calculer la durée de chute et la vitesse du pot arrivant sur le sol.



Doc. 10 *Chute libre d'un pot de fleurs.* ▶

> Pour s'entraîner : Ex. 4 et 5

2. Comment caractériser le mouvement d'un solide en chute dans un fluide ?

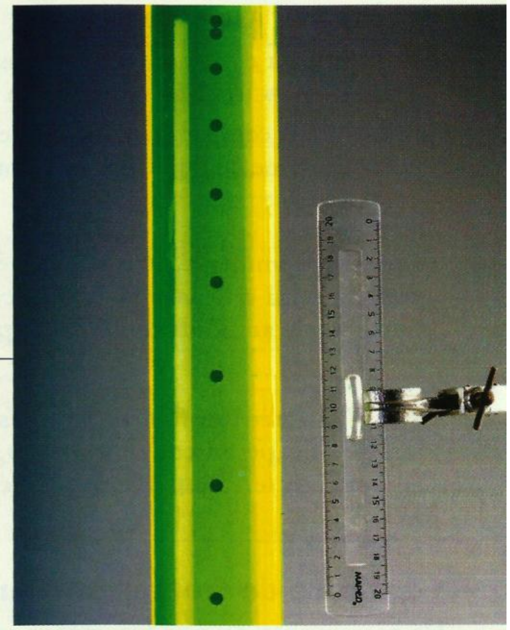
Que se passe-t-il lors de la chute d'un solide dans un fluide si l'action exercée par ce dernier n'est pas négligeable ?
Pour cela, étudions le mouvement de chute d'une bille dans un liquide.

2.1 Étude expérimentale

Activité 2

Comment évolue la vitesse d'une bille tombant dans un liquide ?

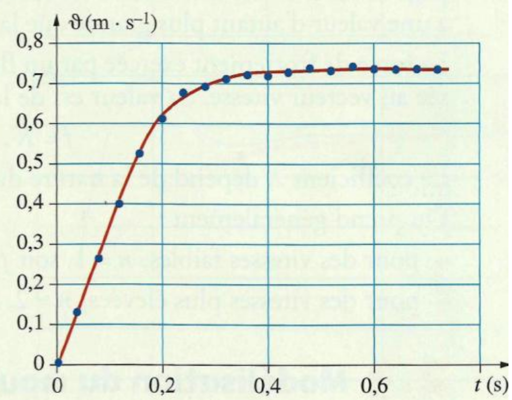
• Réaliser la chute, sans vitesse initiale, d'une bille d'acier dans un liquide [Doc. 11].
• Enregistrer son mouvement et tracer l'évolution de la vitesse de la bille en fonction du temps.
Décrire l'évolution de la vitesse de la bille.



Doc. 11 *Une bille en chute dans un liquide.*

> Observation

Nous constatons [Doc. 12] que la vitesse augmente, puis se stabilise. La bille atteint une vitesse limite : son mouvement est alors rectiligne uniforme.
Cherchons une interprétation.



Doc. 12 *Évolution de la vitesse de la bille au cours du temps.*

2.2 Les forces exercées par le fluide

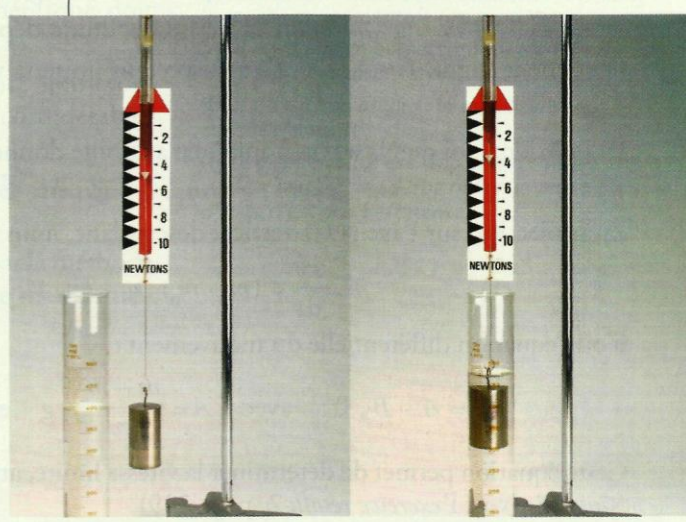
L'action exercée par le fluide sur le solide est modélisée par deux forces : la poussée d'ARCHIMÈDE et la force de frottement due au fluide.

> La poussée d'ARCHIMÈDE

Activité 3

Comment déterminer les caractéristiques de la poussée d'ARCHIMÈDE ?

• Mesurer le poids d'un solide en le suspendant par un fil à un dynamomètre [Doc. 13].
• Immerger entièrement le solide dans des éprouvettes graduées contenant l'une de l'eau, l'autre de l'alcool (masse volumique : 800 g . dm^{-3}).
• Noter les nouvelles indications du dynamomètre, puis déterminer le volume de liquide déplacé par l'immersion du solide.
Déterminer, dans chaque cas, la poussée d'ARCHIMÈDE et comparer sa valeur au poids du liquide déplacé.



Doc. 13 *Étude expérimentale de la poussée d'ARCHIMÈDE.*

> Observation et interprétation

Nous observons que le fil reste vertical et que l'indication du dynamomètre est plus faible lorsque le solide est immergé. La poussée d'ARCHIMÈDE est donc une force verticale $\vec{F}_A$, dirigée vers le haut [Doc. 14, page suivante].

La différence entre les deux indications du dynamomètre est égale à la valeur de la poussée d'ARCHIMÈDE.

L'indication du dynamomètre est plus faible dans l'eau que dans l'alcool : la poussée d'ARCHIMÈDE dépend de la nature du fluide.

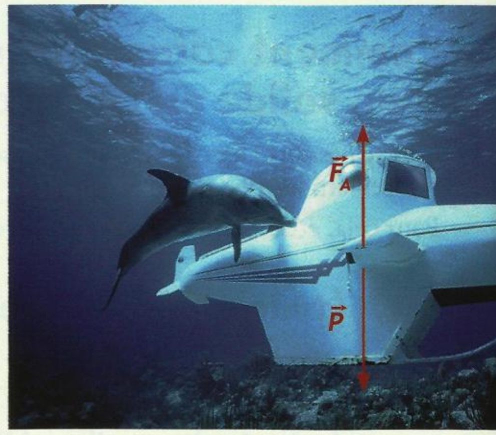
Enfin, si nous comparons la valeur de la poussée d'ARCHIMÈDE à celle du poids du volume de fluide déplacé, nous trouvons le même résultat.

D'où l'énoncé :

Tout corps immergé dans un fluide (liquide ou gaz) est soumis de la part de celui-ci à une force verticale $\vec{F}_A$, orientée vers le haut, de valeur égale au poids du fluide déplacé :

$$\vec{F}_A = -m_0 \cdot \vec{g} = -\rho_0 \cdot V \cdot \vec{g}$$

avec F_A en newton (N), m_0 la masse de fluide déplacé en kg, g l'intensité de la pesanteur en $m \cdot s^{-2}$, ρ_0 la masse volumique du fluide en $kg \cdot m^{-3}$, V le volume de fluide déplacé (égal au volume du solide) en m^3.



Doc. 14 *Le sous-marin immobile est soumis à son poids $\vec{P}$ et à la poussée d'ARCHIMÈDE $\vec{F}_A$.*

> La force de frottement due au fluide

Un parachutiste, ou une automobile en mouvement subissent de la part de l'air une force $\vec{f}$ qui s'oppose à leur mouvement (voir l'*activité préparatoire B*, page 227). Il en est de même de la bille tombant dans un liquide. Cette force a une valeur d'autant plus grande que la vitesse est importante.

La force de frottement exercée par un fluide sur un solide est toujours opposée au vecteur vitesse. Sa valeur est de la forme :

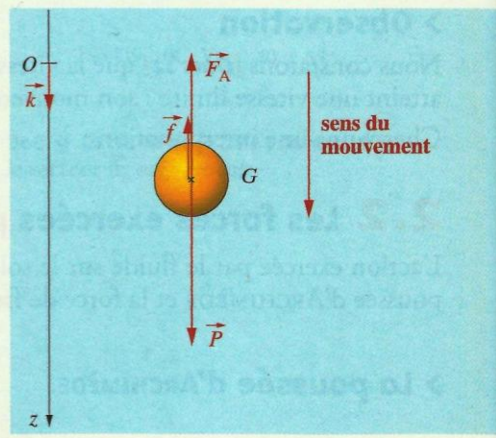
$$f = K \cdot \vartheta^n.$$

Le coefficient K dépend de la nature du fluide et de la forme du solide.

On prend généralement :

– pour des vitesses faibles, $n = 1$, soit $f = K \cdot \vartheta$;

– pour des vitesses plus élevées, $n = 2$, soit $f = K \cdot \vartheta^2$.



Doc. 15 *Inventaire des forces.*

2.3 Modélisation du mouvement

> Équation différentielle du mouvement

La bille est soumise **[Doc. 15]** à son poids $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$, à la poussée d'ARCHIMÈDE $\vec{F}_A = -m_0 \cdot \vec{g}$ (m_0 étant la masse du fluide déplacé) et à la force de frottement fluide $\vec{f} = -K \cdot \vartheta^n \cdot \vec{k}$ ($\vec{k}$ vecteur unitaire vertical, dirigé vers le bas).

La deuxième loi de NEWTON appliquée à la bille donne :

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g} - m_0 \cdot \vec{g} - K \cdot \vartheta^n \cdot \vec{k}.$$

En projection sur l'axe (Oz) vertical descendant, nous obtenons :

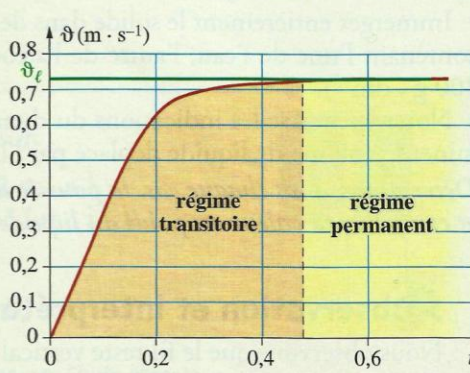
$$m \cdot \frac{d\vartheta}{dt} = (m - m_0) \cdot g - K \cdot \vartheta^n;$$

d'où l'équation différentielle du mouvement :

$$\boxed{\frac{d\vartheta}{dt} = A - B \cdot \vartheta^n} \quad \text{avec} \quad A = \frac{m - m_0}{m} \cdot g \quad \text{et} \quad B = \frac{K}{m}.$$

Cette équation permet de déterminer la vitesse limite, atteinte lorsque $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ **[Doc. 16]** (voir l'*exercice résolu* 2, page 239)

$$A - B \cdot \vartheta^n = 0, \quad \text{soit } \vartheta_\ell = \left(\frac{A}{B}\right)^{1/n}.$$



Doc. 16 *Évolution de la vitesse au cours du temps :*
– avant la vitesse limite : régime transitoire ;
– à partir de la vitesse limite : régime permanent.

> Résolution numérique par la méthode d'EULER

La méthode d'EULER permet de résoudre numériquement cette équation différentielle. Pour l'utiliser, il faut connaître la vitesse à une date donnée.

Cette méthode comporte deux étapes de calcul qu'il faut répéter dans le temps. C'est une **méthode itérative**.

- Généralement, c'est la vitesse initiale ϑ_0 qui est connue (date t_0).

Première étape : on calcule l'accélération a_0 à la date t_0.

L'équation différentielle permet de connaître l'accélération initiale a_0 à la date t_0 : $a_0 = A - B \cdot \vartheta_0^n$.

Deuxième étape : on calcule la vitesse ϑ_1 à la date ultérieure $t_1 = t_0 + \Delta t$.

La durée Δt est appelée **le pas du calcul.**

$$a_0 = \frac{\Delta\vartheta_0}{\Delta t} = \frac{\vartheta_1 - \vartheta_0}{\Delta t}, \text{ soit } \vartheta_1 = \vartheta_0 + a_0 \cdot \Delta t.$$

- **On recommence ces deux étapes de calculs** [**Doc. 17**] :

– on calcule l'accélération a_1 à la date t_1 :

$$a_1 = A - B \cdot \vartheta_1^n.$$

– on calcule ensuite la vitesse ϑ_2 à la date t_2 :

$$\vartheta_2 = \vartheta_1 + a_1 \cdot \Delta t.$$

- **On recommence** en calculant $a_2 = A - B \cdot \vartheta_2^n$, puis ϑ_3 ...

Ces étapes de calculs sont résumées dans le tableau du ***document 17***.

Date	Vitesse	Accélération
$t_0 = 0$	ϑ_0	$a_0 = A - B \cdot \vartheta_0^n$
$t_1 = t_0 + \Delta t$	$\vartheta_1 = \vartheta_0 + a_0 \cdot \Delta t$	$a_1 = A - B \cdot \vartheta_1^n$
$t_2 = t_1 + \Delta t$	$\vartheta_2 = \vartheta_1 + a_1 \cdot \Delta t$	$a_2 = A - B \cdot \vartheta_2^n$

Doc. 17 *Résolution numérique par la méthode d'EULER.*

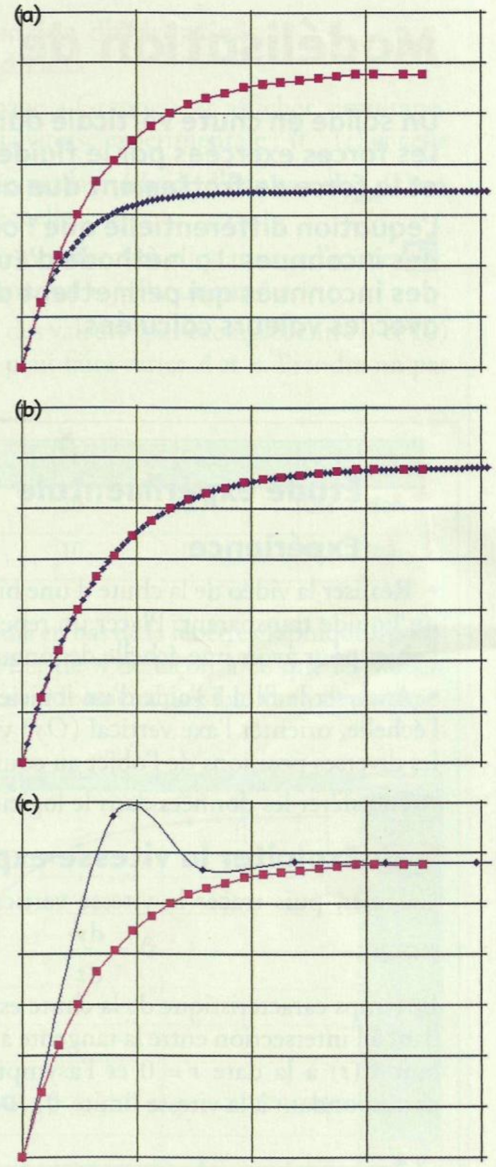
On opère par tâtonnement en cherchant les valeurs de A, B et n qui permettent de faire coïncider les valeurs calculées par la méthode d'EULER, avec les valeurs expérimentales [**Doc. 18a et b**] : la courbe théorique doit coïncider avec la courbe expérimentale.

Le choix du pas de calcul est déterminant. Un pas trop grand donne des résultats aberrants [**Doc. 18c**], et un pas trop petit augmente considérablement le nombre d'opérations à effectuer.

Généralement, on prend pour le pas, le dixième de la durée du régime transitoire.

Un bon accord entre les points expérimentaux et ceux obtenus par la méthode d'EULER permettent de valider les hypothèses, en particulier le modèle utilisé pour les frottements (n = 1 ou 2).

> Pour s'entraîner : Ex. 7, 8 et 10



Doc. 18 *On cherche à superposer la courbe obtenue par la méthode d'EULER (en bleu) avec la courbe expérimentale (en rose).*

***(a)** Il n'y a pas un bon accord : la modélisation n'est pas satisfaisante.*

***(b)** Il y a un bon accord : la modélisation est satisfaisante.*

***(c)** Le pas de calcul est trop grand : même avec un modèle correct, la courbe obtenue par la méthode d'EULER n'est pas pertinente.*